

现代应用数学丛书

# 塑性论

〔日〕鷲津久一郎 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

# 論 性 塑

〔日〕鷺津久一郎 著  
刘 亦 珩 譯

上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共七章,第1章緒論,介绍简单拉伸的应力应变曲线;第2章概述了弹性理论及其与塑性理论的异同点,作为讨论塑性问题的准备;从第3章开始到第7章都是以书末文献(9)(10)(11)为典范,着重作应用数学的处理。书末另附 Green 定理和特征曲线等两篇作为附录,同时附有十六种文献以供读者参考。本书可供高等学校数学系和物理、力学专业的师生及工程师作参考。

现代应用数学丛书

## 塑 性 論

原 书 名 塑 性 論  
原 著 者 (日) 鷲 津 久 一 郎  
原 出 版 者 岩 波 书 店  
译 者 刘 亦 珩

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可整出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 2 8/32 字数 61,000

1961年11月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 28,000

13119

统一书号: 13119 · 428

定 价: (十四) 0.40 元

## 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“现代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的而很广,其內容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而敘述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最新发展状况,并对全书內容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书篇的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

## 譯 者 序

这本小册子是岩波应用数学丛书内有关力学方面的七种著作之一。这七种著作差不多都是在力求使用統一的几何学方法的基础上写成的。所謂統一的几何学方法，乃是以近藤一夫为首的 20 多位日本工程学者及应用数学者自 1951 年以来共同研究的方向。他們的研究成果曾經汇集出版，叫作“工学基础問題的几何学統一的研究”，以后簡称为“汇编”。其中所处理的工学問題范围很广，有电路网络、工学力学系統(特别是轉动电机)、彈性塑性、流体力学以及其他方面的一些問題。其主要精神是以 Gabriel Kron 对于轉动电机分析所提出的思想为基础，进一步推广到对轉动流体机、航空机以及其他近代工业机器的分析。找出这些机器所形成的力学系統，作出它的表現空間，將状态的变化看作坐标变换，机器类型的不同当作約束条件，而建立該空間的几何学，这样就将机器分析变成了几何学的研究。又将这种研究方法应用到連續介质力学的基本問題中，將完全无应力状态看作 Lagrange 状态，任意变形状态看作 Euler 状态，于是將連續介质力学看成是在 Euler 坐标变换群下对于几何学的研究。由于 Lagrange 状态是 Riemann 空間的，Euler 状态是 Euclid 空間的，对于所有 Euler 状态都对应着同一个 Lagrange 状态(即无应力状态)，所以这种几何学是保持 Riemann 度量的空間几何学，当然是一种 Riemann 几何学。因为 Euler 状态是 Euclid 的，所以要求 Riemann 曲率張量为零，將这个条件用不同的形状写出来就得到通常所說的几何方程及协调条件。这样看来，在普通 Euclid 空間内，表面上不相同的两組条件，实质上完全是等同的。而且借此还可以直接处

理非綫性問題及大變形和大變位的問題。总的說來，這種幾何學方法的要點是利用張量算法，通過近代微分幾何空間形式的分析來處理力學及工學上的基本問題。

這本小冊子也是根據同一觀點寫成的。因為它是出版在近藤的“變形幾何學”及其他小冊子之後的，所以基本理論及幾何化過程沒有重述，只着重提出“幾何方程”就是“協調條件”。這可能使初學者及不習慣於運用 Riemann 幾何學思想的讀者引起誤解，所以在閱讀本書時最好參看比它先出版的各种小冊子。不過本著以後各章只是用了一些張量記號，並未使用張量算法及 Riemann 幾何學，讀起來並不會感到很大困難。本書的材料主要是將 R. Hill 的“塑性的數學理論”里特別是數學的部分加以介紹，對於塑性論的物理概念和實際應用敘述得不多。對塑性論不熟悉的讀者，可以參照初等塑性理論的專書閱讀。這類書籍國內已經出版的不少了。

本書共分七章，前兩章是緒論性質的，將彈性理論作了概括的敘述，特別是對彈性和塑性的關係以及二者的異同點作了比較詳細的說明，給第 3 章以後的論述打下了基礎。第 3 章介紹塑性論的基礎，推导出基本方程。第 4 章解說變分法原理，對利用變分法解決塑性論問題作了較全面的敘述。第 5 章處理塑性平面應變問題，第 6 章極限分析，第 7 章全應變塑性理論等，討論得都比較簡單，雖然也涉及到一些實際問題，但語焉不詳。

蘇聯學者在這方面有着很多貢獻，但本書很少提到。蘇聯學者所著的塑性理論專著，在我國已經翻譯出版很多，讀者在学习時可以盡量多加參閱，以補書中之缺。

最後，本譯稿曾經上海交通大學工程力學系李康先同志予以詳細校閱，提出了若干寶貴的意見，特此表示感謝。

劉亦珩 1961 年 6 月于西北大學

## 序

按照 R. Hill 在《塑性的数学理論》中指出的，塑性論是和彈性論对应的術語，它是塑性变形体特别是金属的应力应变的数学理論的綜称。

在設計构件时，为了使构件能經受給定的荷載，需要解决构件各部材料的尺寸的选取問題。这时，若有不发生永久变形的設計条件，那末只要使各部材料的应力不超过比例极限或屈服应力就成了，而且在它的分析里也只需要用到彈性理論。但若有在靜荷載下不发生破坏断裂的設計条件，則其分析就需应用塑性理論了。

至于压延及极曲等塑性加工問題，因其目的是引起永久变形，所以这些內容也是塑性論里所特有的。

本书是估計讀者已經有了一些关于彈性論的預备知識的前提下写的，所以在第 2 章中介紹彈性論时仅略述它的大概，着重于闡明它和第 3 章以后的塑性論的异同点。第 3 章以后将以书末文献 [9], [10], [11] 作典范，着重作应用数学的处理。但由于篇幅的限制，对塑性論基础的实验及物理学的考察沒有介紹，而且对塑性論的应用方面也不得不大加精簡。对这些方面有兴趣的讀者，可以参閱书末的参考文献以及这些文献里所引用的論文。文献 [14] 是概述塑性論最近进展的良好資料。

# 目 录

出版說明

譯者序

序

第1章	緒論	1
§ 1	簡單拉伸試驗的应力应变曲綫	1
第2章	彈性論概述	4
§ 2	应变与協調条件	4
§ 3	应力与平衡方程	7
§ 4	应力应变关系	11
§ 5	边界条件	12
§ 6	微小变位彈性論所处理的問題	13
§ 7	第一变分原理	14
§ 8	第二变分原理	16
第3章	塑性論基础	18
§ 9	屈服条件	19
§ 10	应变强化或加工硬化	21
§ 11	应力应变关系	22
§ 12	对于强化材料的 Prandtl-Reuss 方程	24
§ 13	理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程	26
§ 14	Saint Venant-Levy-Mises 方程	28
第4章	塑性論的变分原理	29
§ 15	强化材料	29
§ 16	理想塑性材料	31
§ 17	理想剛塑性材料	32
第5章	平面塑性应变問題	36
§ 18	平面塑性应变問題的基本方程	36
§ 19	平面塑性应变問題方程的解析积分法	40



§ 20	平滑剛模抽拉薄板 .....	42
第 6 章	极限分析 .....	44
§ 21	安全系数 .....	44
§ 22	平面应变問題的极限分析的定理 .....	45
§ 23	具有圆孔的正方形管的安全系数 .....	48
第 7 章	全应变塑性論 .....	51
§ 24	应力应变关系 .....	51
§ 25	割切模量理論 .....	53
§ 26	Kachanoff 原理 .....	54
§ 27	理想塑性材料(Hencky 材料) .....	54
§ 28	理想剛塑性材料 .....	57
附 录	.....	59
I. Green 定理	.....	59
II. 特征曲綫	.....	60
参考文献	.....	62

# 第1章 緒 論

## §1 简单拉伸試驗的应力应变曲綫

檢查金属材料变形特性的最簡單的方法是简单拉伸試驗。我們將先說明它。对图 1.1 所示的标点距离为  $l_0$ , 断面积为  $A_0$  的金属試件, 作用拉伸荷载  $P$  (这叫作加载), 則标点距离伸长而断面积縮小。將它們各命为  $l$  及  $A$ , 若 在纵軸上取平均应力  $\sigma = P/A$ , 在横軸上取应变  $\epsilon = \ln(l/l_0)$  时<sup>①</sup>, 随着  $P$  的增加,  $\sigma$  和  $\epsilon$  便描出图 1.2 形状的应力应变曲綫。这里  $\ln$  是自然对数, 且在小变形的范围里有  $\sigma \approx P/A_0$  及  $\epsilon = \ln \{1 + (l - l_0)/l_0\} \approx (l - l_0)/l_0$ 。从图 1.2 可以看出, 在应力适当小的范围里,  $\sigma$  和  $\epsilon$  保持綫性关系, 除掉荷载时 (这叫作卸載) 試件就恢复原长  $l_0$ 。便  $\sigma$  和  $\epsilon$  的綫性关系成立的应力最大值 (图 1.2 的  $P$  点) 叫作比例极限。在比例极限内

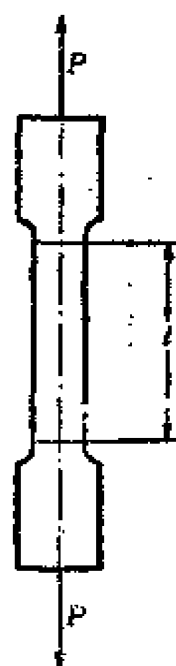


图 1.1 简单  
拉伸試驗

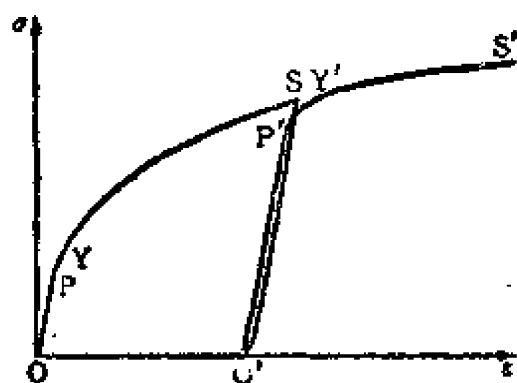


图 1.2 应力应变曲綫

恒有  $\sigma = E\epsilon$ , 比例常数  $E$  叫作 Young 模量。这时若同时測定横向应变  $\delta$ , 就可以知道比数  $-\delta/\epsilon$  是一个常数, 这个常数用  $\nu$  表示, 叫作 Poisson 比。即是, 将直棒拉伸时, 若将比例极限内的纵向拉伸应变命为  $\epsilon$ ,

① 注意在第 2 章以后,  $\sigma$  将用于另一种意义, 參照 (4.5)。

則在橫向發生收縮應變  $\nu\epsilon$ 。屈服應力 (圖 1.2 的  $Y$  點) 定義為: 當荷載全部去掉後能使試件恢復到原長  $l_0$  的最大應力。但若作精密測定時, 則不論加的荷載怎樣小, 當使荷載全部卸除時, 也必然殘留下和該荷載相當的微小永久應變。所以, 習慣上往往把能生成 0.2% 的永久應變的應力定義為屈服應力。若將荷載恢復到原來的情形時, 變形也隨之消失而恢復原形, 這種性質叫作彈性。與此相反, 即使將荷載全部卸掉, 也還殘留下永久應變的性質叫作塑性。

對於大多數的金屬, 若想使塑性變形持續進行時, 非增加應力不可, 即是在大多數的情形里,  $\sigma-\epsilon$  曲線恒有  $\frac{d\sigma}{d\epsilon} > 0$ 。這個現象

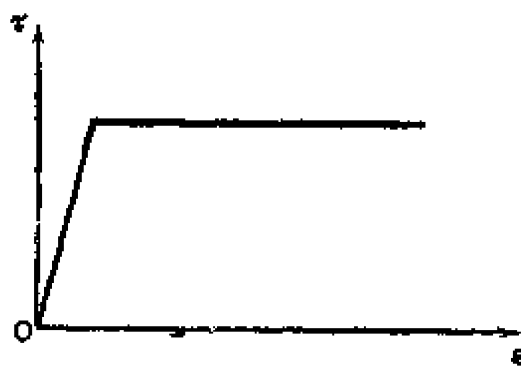


圖 1.3 理想塑性材料

叫作應變強化或者加工硬化。在一般的情形下, 為了使試件產生應變增量  $d\epsilon$  所需要的應力增量  $d\sigma$ , 亦即  $d\sigma/d\epsilon$ , 恒隨  $\epsilon$  的增加而減少, 換言之, 應變強化的比例逐漸縮小, 而應力應變曲線逐漸彎曲。經過屈服點以後,  $\sigma-\epsilon$  曲線平行於  $\epsilon$  軸, 即  $d\sigma/d\epsilon = 0$ , 這樣的材料叫作理想塑性材料 (圖 1.3)。

再回到圖 1.2。若給與某種程度的塑性變形後使荷載自  $S$  減少, 那末當沿着圖的  $SO'$  使荷載回復到 0 時, 便生成  $OO'$  的永久應變。在此情形,  $SO'$  幾乎平行於  $PO$ 。自  $O'$  再加载, 則  $\sigma-\epsilon$  曲線重合於  $O'P'$ , 在這個範圍里是彈性變形,  $P'$  是具有永久應變  $OO'$  的材料的新的比例極限。經過  $P'$  再加上微小塑性應變, 使應力接近原來的  $S$  值時, 則曲線在  $Y'$  附近劇烈彎曲形成  $Y'S'$ , 好象是從  $YS$  延長來的。

為了對於這種材料作數學塑性論的研究, 有必要作如下的理

想化(图 1.4), 即使  $P$  和  $P'$  一致。材料到  $P$  点保持着线性的应力应变关系和弹性, 但  $P$  是屈服点。又  $S, Y', P'$  一致, 且  $SO'$  及  $O'P'Y'$  都和  $PO$  平行。 $S$  可以看成是受有初始应变  $OO'$  的试件的屈服应力。若将

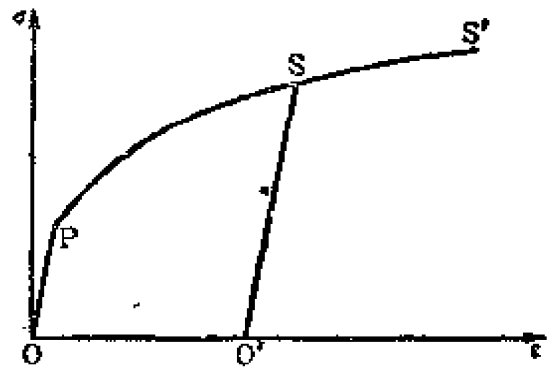


图 1.4 应力应变曲线的理想化

这种受有初始应变的金属的应力应变曲线  $O'SS'$  和完全不受初始应变的金属的应力应变曲线  $OPS$  作比较, 就可以看出它的屈服应力较高, 而且超过屈服应力后曲线急剧弯曲, 具有接近理想塑性材料的特征。

如上所述, 在弹性域里, 应力和应变间有一一对应的关系, 当指定应力时, 则其对应的应变可以由直线  $OP$  唯一地决定。但在塑性域里却没有这样的对应关系, 不过只要利用加载和卸载的适当配合, 就可达到曲线  $OPSS'$  和横轴间的任意点  $(\sigma, \epsilon)$ 。在塑性域里应变不仅取决于最终状态的应力, 而且还有赖于加载路线。因此, 塑性论里的应力应变关系比弹性论里的应力应变关系要复杂得多。

以上是对拉伸试验所作的说明。若再作压缩试验及扭转试验, 那末就可以根据它们作成三维塑性论的基础。

本书在叙述塑性论以前, 先在第 2 章概述弹性的理论, 作为第 8 章进行研讨塑性论和弹性论的异同点的资料。但由于篇幅所限, 第 2 章的弹性理论只能做到概述的程度。读者欲知其详, 可以参阅卷末的文献 [1] 至 [8] 及它们里边所引用的文献。

## 第2章 彈性論概述

### §2 应变与协调条件

在空間內取直角坐标  $x_1, x_2, x_3$ , 命  $x_1, x_2, x_3$  方向的单位向量各为  $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ , 命变形前物体内任意一点  $P_0$  所对应的位置向量是  $\mathbf{r}_0$ , 那末有

$$\mathbf{r}_0 = x_1 \hat{i}_1 + x_2 \hat{i}_2 + x_3 \hat{i}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{i}_i \quad (2.1)$$

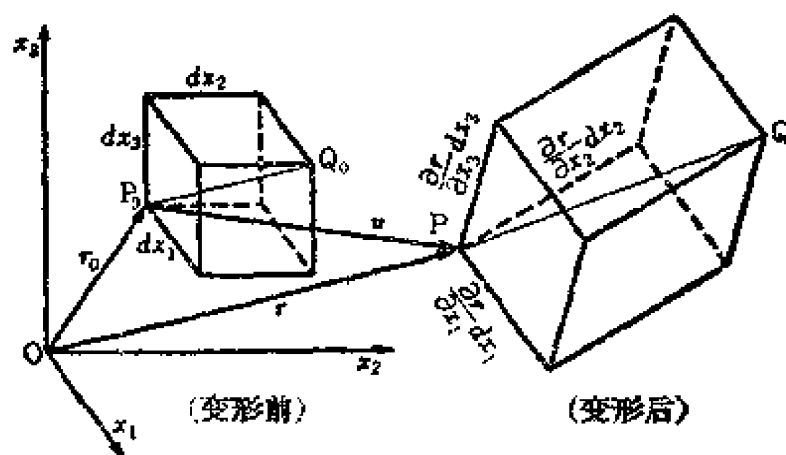


图 2.1 变 位

(图 2.1)。今后将  $(x_1, x_2, x_3)$  叫作物体坐标, 即是指定物体点  $P_0$  的一种参数。这个物体点和变形前位置在  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$  上的点  $Q_0$  间的距离  $P_0Q_0$  用公式

$$ds_0^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (2.2)$$

表示。这里  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 记号, 当  $i=j$  时,  $\delta_{ij}=1$ ;  $i \neq j$  时,  $\delta_{ij}=0$ 。

在变形后点  $P_0$  移到点  $P$ , 命其新的位置向量为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3), \quad (2.3)$$

則  $P_0Q_0$  在变形后的长度  $PQ$  变为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.4)$$

但在这里曾設

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} = g_{ji}, \quad (2.5)$$

所以应变張量  $e_{ij}$  可定义如下:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_j} \right) = e_{ji}, \quad (2.6)$$

或者用  $g_{ij}$  及  $\delta_{ij}$  改写时, 則有

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) = e_{ji}. \quad (2.7)$$

若命  $P_0$  点的变位(或位移)向量是  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ , 其分量为  $(u_1, u_2, u_3)$ , 則有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 (x_i + u_i) \mathbf{i}_i, \quad (2.8)$$

于是  $e_{ij}$  可用变位分量表示为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = e_{ji}. \quad (2.9)$$

直到現在, 对于变位的大小还未加上任何限制。但在微小变位彈性論里, 由于假設变位是微小的, 所以在公式(2.9)里仅取变位的一阶項而略去高阶項。而且將微小变位理論里的  $e_{ij}$  改写为  $\varepsilon_{ij}$  时, 則有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.10)$$

在微小变位理論里, 通常用  $x, y, z$  代替  $x_1, x_2, x_3$ , 用  $u, v, w$  代替  $u_1, u_2, u_3$ , 用  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$  代替  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}$ ; 亦即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

若想說明應變的幾何意義，則  $\varepsilon_x$  是變形前平行於  $x$  軸的微小綫素在變形後的相對變形， $\varepsilon_y$  及  $\varepsilon_z$  的意義也是這樣的。 $\gamma_{yz}$  則是變形前平行於  $y$  軸的微小綫素和平行於  $z$  軸的微小綫素的交角（直角）在變形後的相差角，一般叫作剪應變。 $\gamma_{zx}$ ， $\gamma_{xy}$  的意義也類此。

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$  是按照 (2.11) 用三個量  $u, v, w$  的導數定義的六個量，所以它們不能相互無關。當任意確定  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$  時，就可以按照 (2.11) 由單值連續的  $u, v, w$  導出充要條件，叫作協調條件。按照森口氏的寫法，可以將微小變位理論的協調條件寫成如下形狀<sup>14)</sup>：

$$\begin{pmatrix} R_x & U_x & U_y \\ U_x & R_y & U_z \\ U_y & U_x & R_z \end{pmatrix} = 0, \quad (2.12) \textcircled{1}$$

這裡有

$$\left. \begin{aligned} R_x &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ R_y &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ R_z &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ U_x &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ U_y &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ U_z &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

① (2.12) 就是意味着  $R_x = R_y = R_z = U_x = U_y = U_z = 0$ 。

而且曾設所考虑的物体形成一个单連通域。

协调条件的意义可以这样解释:将物体切离成小碎片,然后給各个小碎片以任意应变  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ ; 若各碎片的应变不适合条件(2.12)时,那末将它们再拼凑起来而成的物体里必然产生錯位現象。在一般的情形下,我們不考虑单連通物体发生錯位現象的問題,所以非恒滿足条件(2.12)不可<sup>①</sup>。

在有限变位理論里,应变張量  $e_{mn}$  可以按(2.6)式导出的充要条件,亦即协调条件,是由  $g_{ij} = \delta_{ij} + 2e_{ij}$  所作的 Riemann 曲率張量  $R_{ijkl} = 0$  (参看本丛中矢野著《几何学》§46; 山本著《有限变位彈性論》)。

### §3 应力与平衡方程

考虑变形前由六个面

$$x_i = \text{const}, \quad x_i + dx_i = \text{const} \quad (3.1)$$

所包围着的微小六面体在变形后的平衡方程(图3.1)。在变形后的六面体上作用的力,是通过六个面由外侧的物体部分所作用的

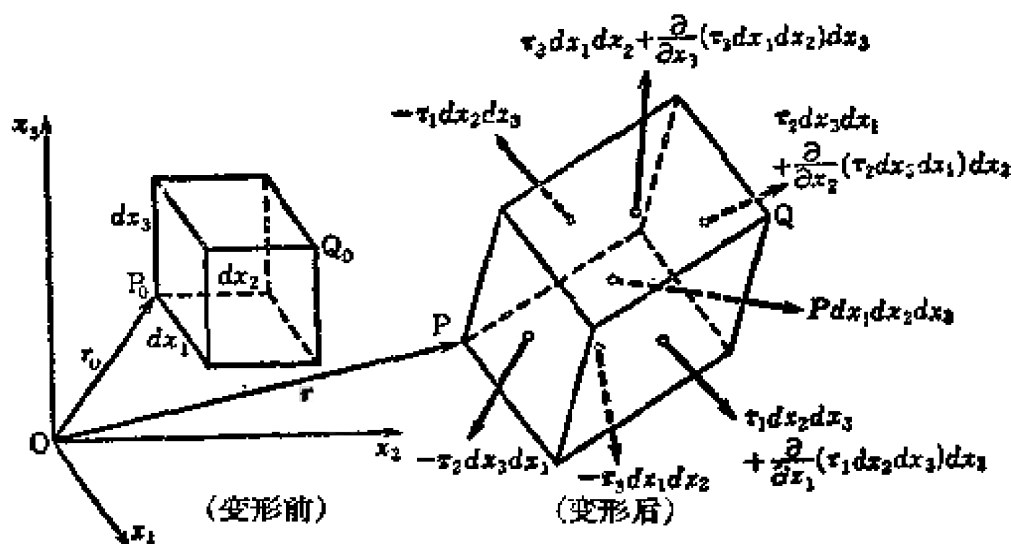


图3.1 应力

① (2.11) 和 (2.12) 是等价的, 今后就将 (2.11) 叫作协调条件。这两个式子的等价是由 Riemann 几何观点作出的。关于这一点可参看譯者序。——譯者注



內力,及象慣性力那样对应着六面体的质量而作用的所謂体力。着設变形前由  $dx_2$  和  $dx_3$  所作的矩形上,变形后作用的內力为  $\tau_1 dx_2 dx_3$ , 則在六面体上作用的內力是

$$\left. \begin{aligned} -\tau_1 dx_2 dx_3, & \quad \tau_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_1 dx_2 dx_3) dx_1, \\ -\tau_2 dx_3 dx_1, & \quad \tau_2 dx_3 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tau_2 dx_3 dx_1) dx_2, \\ -\tau_3 dx_1 dx_2, & \quad \tau_3 dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tau_3 dx_1 dx_2) dx_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

着再把  $\tau_{ij}$  定义为

$$\tau_i \equiv \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3), \quad (3.3)$$

且設变形前  $dx_1, dx_2, dx_3$  所包圍的微小六面体上,变形后作用的体力为  $P dx_1 dx_2 dx_3$ , 則在这个微小六面体上作用的力及力矩的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (\partial \tau_i / \partial x_i) + P = 0, \\ \tau_{ij} = \tau_{ji}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

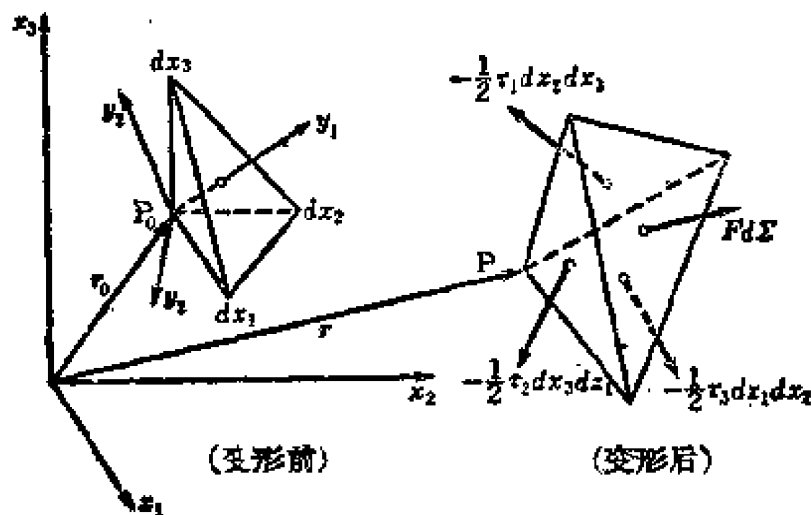


图 3.2 微小四面体

为了推出  $\tau_{ij}$  的变换律,考虑图 3.2 那样的微小四面体的平衡。設变形前这个微小四面体的斜面的面积是  $d\Sigma$ , 变形后在这

个斜面上作用的内力是  $F d\Sigma$ , 则平衡方程为

$$\tau_1 \left( \frac{1}{2} \right) dx_2 dx_3 + \tau_2 \left( \frac{1}{2} \right) dx_3 dx_1 + \tau_3 \left( \frac{1}{2} \right) dx_1 dx_2 = F d\Sigma. \quad (3.5)$$

在图 3.2 内, 考虑原点  $P_0$  的局部直角坐标系  $y_1, y_2, y_3$ , 若使其一轴  $y_1$  与斜面的外向法线方向一致时, 则由几何关系得

$$\left. \begin{aligned} dx_2 dx_3 &= 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} d\Sigma, & dx_3 dx_1 &= 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} d\Sigma, \\ dx_1 dx_2 &= 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_3} d\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

由 (3.5) 及 (3.6) 得到

$$\tau_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \tau_3 \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = F. \quad (3.7)$$

若将定义在坐标系  $(y_1, y_2, y_3)$  里的  $\tau_i$  及  $\tau_{ij}$  各写为  $s_i$  及  $s_{ij}$ , 则 (3.7) 可写成

$$\sum_k \tau_k \frac{\partial y_1}{\partial x_k} = s_1. \quad (3.8)$$

于是按照定义, 有

$$\tau_k = \sum_l \tau_{kl} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l}, \quad s_i = \sum_j s_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_j}. \quad (3.9)$$

将 (3.8) 和 (3.9) 归并起来, 便得到变换律

$$s_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \tau_{kl} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}. \quad (3.10)$$

这里的  $\tau_{kl}$  叫作伪应力, 在直角坐标变换时, 它服从于张量变换律 (3.10)。

在直角坐标的微小变位理论里, 设变位是微小的, 并作如下的近似

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} = \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \mathbf{i}_3 \approx \mathbf{i}_1,$$

且將  $\tau_{ij}$  代以

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \sigma_x i_1 + \tau_{xy} i_2 + \tau_{xz} i_3, & \tau_2 &= \tau_{yx} i_1 + \sigma_y i_2 + \tau_{yz} i_3, \\ \tau_3 &= \tau_{zx} i_1 + \tau_{zy} i_2 + \sigma_z i_3. \end{aligned} \right\} (3.11)$$

又命

$$P = X i_1 + Y i_2 + Z i_3$$

时(图 3.3), 则(3.4)变成常见的关系式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \end{aligned} \right\} (3.12)$$

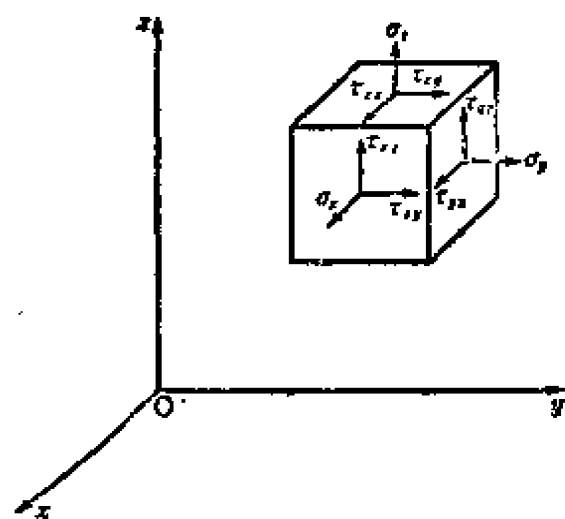


图 3.3 应力图

今后为了简单起见, 将用记号  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$  代替  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ ; 用  $X_1, X_2, X_3$  代替  $X, Y, Z$ . 这样, (3.12) 变成如下形状:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ (i, j &= 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} (3.13)$$

这里  $\sigma_{ij,j}$  表示  $\sigma_{ij}$  对于  $x_j$  的导数, 而重复两次的标数乃表示对于该标数自 1 至 3 作总和。例如

$$\sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}.$$

(3.12) 是含有九个未知量的六个方程, 显然, 仅由这些方程是不能把问题解开的, 这便是静不定问题产生的原因。为了使问题有解, 就必须导入应力应变关系。

## §4 应力应变关系

用彈性論处理物体内部应力到处都在屈服应力以下的情形时,曾把应力应变关系假定为前面所說的  $\tau_{ij}$  和  $e_{mn}$  間的关系,例如命为

$$f_q(\tau_{11}, \tau_{22}, \dots; e_{11}, e_{22}, \dots) = 0 \quad (q=1, 2, \dots, 6). \quad (4.1)$$

若想将上式就  $\tau_{ij}$  解开时,因为  $e_{mn}$  是微小的,所以在作 Taylor 展开时只取一阶的项,就可以得到

$$e_{mn} = C_{mntj} \tau_{ij} \quad (4.2)$$

形状的解。这里  $C_{mntj}$  是彈性常数, (4.2) 叫作一般 Hooke 律。若假定材料为各向同性,則  $C_{mntj}$  中只有两个独立的常数。

在微小变位彈性論里,如前所述,将  $e_{11}, \dots$  各代以  $\varepsilon_x, \dots$ ; 将  $\tau_{ij}$  各代以  $\sigma_x, \dots$ ; 于是在各向同性的情形下有如下形状的应力应变关系:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), \dots, G\gamma_{yz} = \tau_{yz}, \dots \quad (4.3)$$

或者反过来解,則有

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \dots, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

这里  $E = 2(1+\nu)G$ , 而  $E$  是 Young 模量,  $\nu$  是 Poisson 比,  $G$  是剪切彈性模量。(4.3) 及 (4.4) 可以簡写如下:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad (4.3')$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} e \delta_{ij} + 2G e'_{ij}. \quad (4.4')$$

这里

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad e = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (4.5)$$

$\sigma'_{ij}$  及  $e'_{ij}$  各叫作应力偏量及应变偏量, 而  $\delta_{ij}$  是前面已經說过的

Kronecker 記号, 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

这时有

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - e \delta_{ij}, \quad (4.6)$$

也就是

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_x - \sigma, \quad \dots, \quad \sigma'_{23} = \tau_{xy}, \quad \dots; \\ \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_x - e, \quad \dots, \quad \varepsilon'_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \quad \dots. \end{aligned}$$

至于以下各关系的成立都很容易验证:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ii} &= \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0, \\ \varepsilon'_{ii} &= \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33} = 0. \end{aligned}$$

## §5 边界条件

将物体表面  $S$  分成两部分, 一部分是由外力确定边界条件的部分  $S_1$ , 另一部分是由变位确定边界条件的部分  $S_2$ , 并且有  $S = S_1 + S_2$ . 设  $S_1$  上的外力在变形前对于每个单位面积是  $\bar{F}$ ,  $S_2$  上的变位向量是  $\bar{r}$ , 那末按照 (3.7) 可得如下边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{在 } S_1 \text{ 上} \\ \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum \tau_i \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = \bar{F}, \\ \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}. \end{array} \quad (5.1)$$

这里  $y_n$  表示变形前表面  $S_1$  上的外向法线方向的直角坐标。

在直角坐标的微小变位理论里, 命  $y_n$  的方向余弦是  $l, m, n$ , 即

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = l, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_2} = m, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_3} = n;$$

更命  $\bar{F} = \bar{F}_x i_1 + \bar{F}_y i_2 + \bar{F}_z i_3$ , 且在  $S_2$  上给出的变位向量的  $i_1, i_2, i_3$  方向的分量各为  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , 则 (5.1) 变为

$$\text{在 } S_1 \text{ 上 } \left. \begin{aligned} \bar{F}_x &\equiv \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \bar{F}_x, \\ \bar{F}_y &\equiv \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \bar{F}_y, \\ \bar{F}_z &\equiv \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \bar{F}_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } \quad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}. \quad (5.3)$$

若将  $l, m, n$  写成  $n_1, n_2, n_3$ ; 将  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$  写成  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ ; 将  $u, v, w$  写成  $u_1, u_2, u_3$  时, 则 (5.2) 及 (5.3) 可缩写为

$$\text{在 } S_1 \text{ 上 } \quad \bar{F}_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (5.2')$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } \quad u_i = \bar{u}_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (5.3')$$

## §6 微小变位弹性論所处理的問題

微小变位弹性論所处理的問題可以这样来叙述:

在完全沒有应力的物体表面部分  $S_1$  上的外力为  $\bar{F}_i (i=1, 2, 3)$ , 在其余表面部分  $S_2$  上的变位为  $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$ , 而且对于每个单位体积都有一个体力  $X_i (i=1, 2, 3)$  作用时, 問在物体內部将引起怎样的应力  $\sigma_{ij}$  及变位  $u_i$ ?

要解决这一問題, 必須应用如下几个方程。

$$\text{平衡方程:} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad (6.1)$$

$$\text{应力应变关系:} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} e \delta_{ij} + 2G \varepsilon'_{ij}, \quad (6.2)$$

$$\text{或} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2G}; \quad (6.2')$$

$$\text{协调条件:} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (6.3)$$

$$\text{边界条件: 在 } S_1 \text{ 上 } \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i, \quad (6.4)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } \quad u_i = \bar{u}_i \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (6.5)$$

所有滿足这些条件全部的量, 就是我們所求的解, 叫作正确解。解方程 (6.1) 到 (6.5) 的方法已經有了好几种, 例如, 利用 (6.2) 及 (6.3) 将 (6.1), (6.4), (6.5) 变成关于  $u_i$  的三个联立微分方程和

它的边界条件,便是一种方法。若想知道那些解法的詳情,可以参閱卷末的参考文献。

解微小变位彈性問題时,可以不必直接作微分方程的配合,而采用变分法的方法。这种方法特別在彈性問題的近似解法里有着重要的应用。以下将略述微小变位彈性論里的两个变分原理。

### §7 第一变分原理

这个原理又叫作**最小势第原理**,是由假想变位原理推导出来的。首先从应变分量定义应变能量函数  $A$ :

$$A = \frac{(1-\nu)G}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{G}{2} [\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2 - 4(\varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y)]. \quad (7.1)$$

这是在关系式

$$\delta A = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (7.2)$$

里将  $\sigma_x, \dots$  等用应力应变关系(6.2)代入后积分而得到的。 $A$  表示每个单位体积的应变能量,所以具有如下性质:

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \dots, \frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}. \quad (7.3)$$

我們順便指出,(7.1)还可以写成如下形状①:

$$A = \frac{3E}{2(1-2\nu)} \varepsilon^2 + G \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (7.4)$$

第一变分原理可以表达如下:

“設滿足几何边界条件(6.5)的一組变位是  $u_i^*$ , 利用協調条件(6.3)由  $u_i^*$  导出的应变为  $\varepsilon_{ij}^*$  (以后将它叫作**比較第**), 那末使

$$\Pi_v^* = \iiint_V (A^* - X u_i^*) dv - \iint_{\Sigma_1} F u_i^* dS \quad (7.5)$$

①  $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{21} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{33}$   
 $= \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2).$

取极小值时,就得到了正确解。这里  $V^*$  表示该积分是对物体全区域作的,  $S_1$  表示这个积分对表面部分  $S_1$  作的,  $A^*$  表示在(7.1)式的右侧里将  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$  各代以  $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \dots$  后而得到的  $A$ 。”

**证明** 设用应力应变关系(6.2')联系着的两组应力应变各为  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  及  $\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*$ , 容易验证下列关系必成立:

$$\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}' \sigma_{ij}''}{2G} + \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma \sigma^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*. \quad (7.6)$$

利用(7.6)得

$$2(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) - (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}), \quad (7.7)$$

再由(6.2')有

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2G} (\sigma_{ij}'' - \sigma_{ij}') (\sigma_{ij}'' - \sigma_{ij}') \\ &\quad + \frac{3(1-2\nu)}{E} (\sigma^* - \sigma)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

所以只要当  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$  时,就有

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \geq (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \sigma_{ij}, \quad (7.9)$$

且上式的等号仅当  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$  时才能成立。

今再设正确解的应变、应力及变位各为  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  及  $u_i$ , 若把正确解的  $\Pi_p^*$  写为  $\Pi_p$ , 则有

$$\begin{aligned} \Pi_p^* - \Pi_p &= \iiint_V \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dv - \iiint_V X_i (u_i^* - u_i) dv \\ &\quad - \iint_{S_1} \bar{F}_i (u_i^* - u_i) dS \\ &\geq \iiint_V (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \sigma_{ij} dv - \iiint_V X_i (u_i^* - u_i) dv \\ &\quad - \iint_{S_1} \bar{F}_i (u_i^* - u_i) dS \quad [\text{由(7.9)}] \\ &= - \iiint_V (\sigma_{ij,j} + X_i) (u_i^* - u_i) dv \end{aligned}$$



$$+ \iint_{S_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{F}_i) (u_i^* - u_i) dS + \iint_{S_2} \sigma_{ij} n_j (u_i^* - u_i) dS.$$

[按 Green 定理] (7.10)

正确解必满足  $V$  里的平衡方程(6.1)和  $S_1$  上的边界条件, 且在  $S_2$  上正确解和比较解都有  $u_i = \bar{u}_i$ ,  $u_i^* = \bar{u}_i$ , 所以(7.10)的最后一项消去, 从而证明了

$$H_p^* \geq H_p. \quad (7.11)$$

## § 8 第二变分原理

这个原理又叫作余能原理, 是将最小势能原理通过 Friedrichs 变换后而得到的<sup>[5], [6]</sup>。首先用应力分量定义余能函数  $B$ :

$$B = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(1+\nu) (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x) \}. \quad (8.1)$$

这是在公式

$$\delta B = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (8.2)$$

里将  $\varepsilon_x, \dots$  各用(6.2')代入后积分而得到的。它有如下性质:

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x, \dots, \frac{\partial B}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}, \quad (8.3)$$

(8.1) 又可以写成①

$$B = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma^2 + \frac{1}{4G} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (8.4)$$

第二变分原理可以表述如下:

“设满足平衡方程(6.1)和力学边界条件(6.4)的一组应力为  $\sigma_{ij}^*$  (这叫作比较解)②, 那末使

$$H_c^* = \iiint_V B^* dv - \iint_{S_2} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \quad (8.5)$$

①  $\sigma_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{11} \sigma_{11} + \sigma_{12} \sigma_{12} + \sigma_{13} \sigma_{13} + \sigma_{21} \sigma_{21} + \sigma_{22} \sigma_{22} + \sigma_{23} \sigma_{23} + \sigma_{31} \sigma_{31} + \sigma_{32} \sigma_{32} + \sigma_{33} \sigma_{33}$   
 $= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2).$

② 选取  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0$  的  $\sigma_{ij}^*$ .

取极小值时,便得到了正确解。这里  $B^*$  表示(8.1)右侧的  $\sigma_{ij}$ , ... 各代以  $\sigma_{ij}^*$ , ... 后而得到的  $B_*$ 。”

**证明** 首先由(7.6)及(7.9)导出

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \geq (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}. \quad (8.6)$$

设比较解的应变应力各为  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\sigma_{ij}^*$ ; 正确解的应变应力及变位各为  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  及  $u_i$ , 若把正确解的  $\Pi_c^*$  写为  $\Pi_c$ , 则有

$$\begin{aligned} \Pi_c^* - \Pi_c &= \iiint_V \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) dv - \iint_{S_1} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j \bar{u}_i dS \\ &\geq \iiint_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij} dv - \iint_{S_1} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j \bar{u}_i dS \quad [\text{由(8.6)}] \\ &= - \iiint_V (\sigma_{ij,j}^* - \sigma_{ij,j}) u_i dv + \iint_{S_1} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j u_i dS \\ &\quad + \iint_{S_1} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j (u_i - \bar{u}_i) dS. \quad [\text{按Green定理}] \quad (8.7) \end{aligned}$$

因为  $\sigma_{ij}^*$  及  $\sigma_{ij}$  都必须满足平衡方程(6.1), 所以它们的差  $\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}$  必满足  $\sigma_{ij,j}^* - \sigma_{ij,j} = 0$ . 又在  $S_1$  上有

$$\sigma_{ij}^* n_j = \bar{F}_i, \quad \sigma_{ij} n_j = F_i,$$

在  $S_2$  上有  $u_i = \bar{u}_i$ , 所以(8.7)的最后一项为零, 从而证明了

$$\Pi_c^* \geq \Pi_c. \quad (8.8)$$

以上证明了  $\Pi_p$  和  $\Pi_c$  的极小性质。但从  $\Pi_p$  及  $\Pi_c$  的第一变分为零, 即逗留值条件  $\delta \Pi_p = 0$  或  $\delta \Pi_c = 0$  也能求出正确解来, 这是大家都知道的。

上述两个原理在求弹性问题的近似解时很有用处。将这两个原理合并起来使用, 就可以求得杆件扭转刚性等的上下界。关于这方面的内容可以参阅书末文献[7][8]①。

① 还可参阅本丛中加藤敏夫著:《变分法及其应用》95~99页。

### 第3章 塑性論基础

前章將彈性論作了一個概述，從本章起，開始對塑性論問題進行考察。彈性論和塑性論最顯著的差別在於應力應變關係，在塑性域里，應力和應變間不再有(4.1)那樣的关系式成立，應變不僅取決於最終狀態的應力，而且還要依賴於加載過程的路綫以及退火處理。所以在塑性論里和彈性論中的應力應變关系相當的关系是應力增量和應變增量关系。基於这个关系上的塑性論，叫作應變增量塑性論。本書從第3章到第6章就是講述這樣的塑性論和它的应用。第7章所要講的全應變塑性論是這種塑性論的特例。

應變增量塑性論的問題可以大概歸結如下：

“設已指定在某一瞬時  $t$  具有平衡狀態的物體  $V$ ，和這一物體內部所有點的應力狀態  $\sigma_{ij}$  及其荷載路綫，並假定在瞬時  $t+dt$  時物體表面部分  $S_1$  上的外力增量為  $d\bar{F}_i$  ( $i=1, 2, 3$ )，而其餘表面部分  $S_2$  上的變位增量為  $d\bar{u}_i$  ( $i=1, 2, 3$ )。那末這時在物體內部將引起怎樣的應力增量  $d\sigma_{ij}$  及變位增量  $du_i$ ？”

本章里將求出解這一問題時所必需的應力增量和應變增量間的关系(今後也簡稱它為應力應變关系)。當確定應變增量的理論後，將諸量間成立的方程沿着荷載路綫作積分，就可以計算出任意荷載階段下物體里面的應力及應變了。

在前一章的彈性論里， $x_i$  是在退火後無應力狀態時所決定的物體坐標，今在應變增量塑性論里， $x_i$  却是空間坐標。在前一章里  $\sigma_{ij}$  是  $\varepsilon_{mn}$  應變所引起的應力，而在應變增量塑性論里  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$  却是瞬間  $t$  時直角坐標的六平面  $x_k = \text{const}$ ,  $x_k + dx_k = \text{const}$  ( $k=1, 2, 3$ ) 所包圍的微小六面體的側面上作用的應力，即應變增

量理論是具有初始应力的物体的微小变位理論。前一章的  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$  可以看作是跟应变增量理論里的  $d\sigma_{ij}$ ,  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $du_i$  相对应的。

## §9 屈服条件

首先考虑物体的微小元素达到怎样的应力状态时才能引起屈服？在简单拉伸的情形下，当应力达到屈服应力时才引起屈服（图 1.4），当然由于压缩和剪断也可能引起屈服。其次，我們还可以考察这样的问题，将薄壁圆管拉伸到引起塑性变形后除去荷载的一部分，那末需要再加上怎样的扭转，才能引起新的塑性变形（即发生屈服）？通常在组合应力的情形，再度使塑性变形开始的应力間可以設想有如下关系式：

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) = c. \quad (9.1)$$

这里  $c$  是将物体完全退火而回到应力为零的状态后，再进行机械处理或热处理时所决定的参数。(9.1)叫作屈服条件。

若設想材料是各向同性的，則(9.1)可以写成

$$f(J_1, J_2, J_3) = c. \quad (9.2)$$

$J_1, J_2, J_3$  是应力張量  $\sigma_{ij}$  的三个低阶不变量，而且可以用主应力分量  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  定义如下：

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}, \\ J_2 &= -(\sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I + \sigma_I\sigma_{II}), \\ J_3 &= \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

按实验結果，即使各向等压（静水压）或各向等拉分別起作用时，在一阶近似范圍內，金属的屈服也不受影响。所以若将此看作所考虑的材料属性时，那末  $f$  仅取决于应力偏量  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  的主分量  $\sigma'_I, \sigma'_{II}, \sigma'_{III}$ 。但  $\sigma'_I + \sigma'_{II} + \sigma'_{III} = 0$ ，所以(9.2)变成

$$f(J'_2, J'_3) = c. \quad (9.4)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} (\sigma_I'^2 + \sigma_{II}'^2 + \sigma_{III}'^2) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}', \\ J_3' &= \frac{1}{3} (\sigma_I'^3 + \sigma_{II}'^3 + \sigma_{III}'^3) = \frac{1}{3} \sigma_{ij}' \sigma_{jk}' \sigma_{ki}'. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

下面我們考察屈服条件的几何学表現 (图 9.1)。若將  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  取作直角坐标时, (9.4) 和  $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$  没有关系, 所以变成以  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  为母綫方向的柱面。这时只要考虑此柱面和平面  $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$  (平面  $\Pi$ ) 的交截曲綫就够了。这个曲綫叫作屈服曲綫。若取  $\sigma_{III}$  軸在平面  $\Pi$  上的正射影的方向为  $y$  軸的方向, 并在該平面上取垂直于这个方向的  $x$  軸时, 就得关系如下:

$$\sigma_I' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y, \quad \sigma_{II}' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y, \quad \sigma_{III}' = \sqrt{\frac{2}{3}}y. \quad (9.6)$$

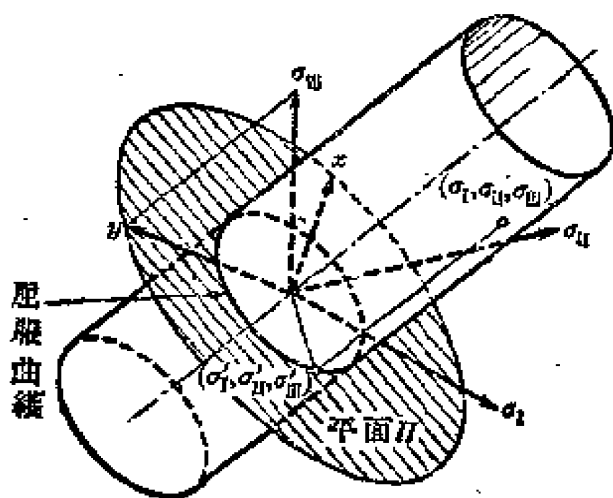


图 9.1 屈服曲綫

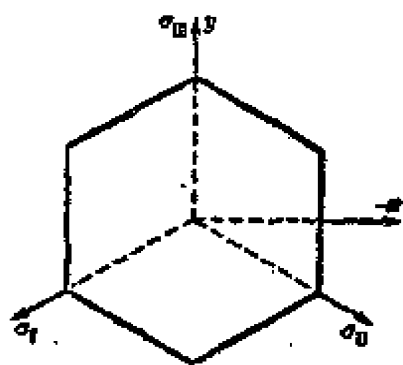


图 9.2 Tresca 屈服曲綫

經常用到的屈服条件有以下两种:

(1) **Tresca 屈服条件** 假設最大剪切应力达到某一个值时就引起屈服。例如, 当  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$  时, 这个条件是

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \text{常数}. \quad (9.7)$$

在此情形下, 利用 (9.6) 立即推知屈服曲綫是正六角形 (图 9.2)。

(2) **Mises 屈服条件** 設当  $J'_2$  达到某一个值时就引起屈服, 即

$$2J'_2 = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \sigma_I'^2 + \sigma_{II}'^2 + \sigma_{III}'^2 = 2k^2, \quad (9.8)$$

或

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 6k^2. \quad (9.8')$$

这里  $k$  是对应于(9.4)的  $\sigma$  的, 乃由应变路线所决定的参数。利用(9.6)就可以知道, 屈服曲线是一个圆, 其半径为  $\sqrt{2}k$  (图9.3)。在(9.8')里, 除了  $\tau_{xy}$  之外, 使其他应力分量都为零时, 便得到  $\tau_{xy} = k$ , 即  $k$  乃是将薄壁圆管扭转而得到的纯剪切屈服时的最大剪切应力。若在(9.8')内設  $\sigma_x = Y$ , 而其余应力都为零, 这样便得到  $Y = \sqrt{3}k$ , 即  $k$  等于拉伸屈服应力的

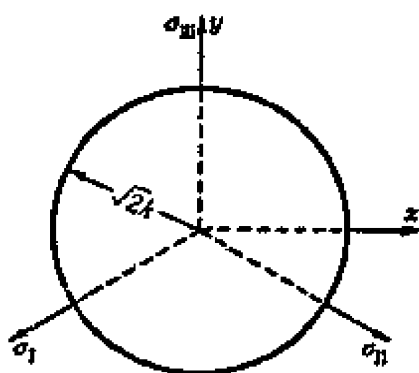


图9.3 von Mises 屈服曲线

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 此时最大剪切应力是  $\frac{Y}{2}$  即  $\frac{\sqrt{3}}{2}k$ . 按照 Mises 的屈服条件, 纯剪切的剪切应力是简单拉伸时的最大剪切应力的  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  倍, 即约为 1.155 倍。另一方面, 按照 Tresca 的条件则两者相等。

对于多数金属, 可以证实 Mises 条件比 Tresca 条件更能符合实验结果。但在理论上应用 Tresca 条件比较简单, 所以多被采用。

## § 10 应变强化或加工硬化

以下将考虑退火后的塑性变形和 Mises 圆半径  $\sqrt{2}k$  间的关系问题。假设在瞬时  $t$  具有平衡状态的物体中, 占有位置  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 的元素, 随着外荷载的微小增加, 引起了微小应力增加  $d\sigma_{ij}$  及微小应变增加  $d\epsilon_{ij}$ . 这里  $d\epsilon_{ij}$  定义为

$$de_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (du_j)}{\partial x_i} \right], \quad (10.1)$$

但  $du_i (i=1, 2, 3)$  是表示在瞬时  $t$  位于  $x_i (i=1, 2, 3)$  的物体元素的变位。在第2章彈性論里，曾設在退火后的状态所决定的物体坐标为  $x_i$ ，但在应变增量塑性論里采用的  $x_i$  是空間坐标，这里还有重提的必要。

現在作分解  $de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p$ ，将  $de_{ij}^e$  叫作彈性应变增量， $de_{ij}^p$  叫作塑性应变增量。 $de_{ij}^e$  乃卸去所增加的荷载后能恢复原状的应变增量，所以由(4.3')显然有

$$de_{ij}^e = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}, \quad (10.2)$$

这里  $d\sigma = \frac{1}{3} d\sigma_{ii} = \frac{1}{3} (d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33})$ ,

即使除去  $d\sigma_{ij}$  后  $de_{ij}^p$  也还残留。物体元素作变形  $de_{ij}$  时，应力所做的功对于每个单位体积是  $\sigma_{ij} de_{ij}$ ，其中  $dW_e = \sigma_{ij} de_{ij}^e$  是可恢复的彈性功。 $dW_p = \sigma_{ij} de_{ij}^p$  叫作对于每个单位体积的塑性功。塑性变形在热力学的意义下是不可逆的过程，所以  $dW_p \geq 0$ 。若从物体的某个元素着眼，沿着該退火后的物体直到瞬时  $t$  所经历的路綫而考虑积分

$$W_p = \int \sigma_{ij} de_{ij}^p, \quad (10.3)$$

并假定 Mises 圓的半徑仅为  $W_p$  的函数，那末(9.8)便可以写成如下形状：

$$\sqrt{\frac{1}{2} \{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}\}}^{\frac{1}{2}} = h(W_p), \quad (10.4)$$

这样就可以使应变强化和 Mises 圓的半徑間有了联系。

### § 11 应力应变关系

在前一节中，已經使 Mises 屈服条件和应变强化間相互联系

起来。若将同样的理論推广到一般屈服条件(9.4)中,則有

$$f(J'_2, J'_3) = F\left(\int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p\right). \quad (11.1)$$

但在此式內,  $F$  代替了(9.4)里的  $c$ .

假設物体元素的应力  $\sigma_{ij}$  滿足屈服条件(11.1), 即設应力点位于某一屈服曲綫上。这时, 若再增加应力使該应力点达到該屈服曲綫的外側, 那末塑性应变也应该再增加, 这叫作加载。此时可以决定  $f$  的符号, 使它滿足条件

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial J'_2} dJ'_2 + \frac{\partial f}{\partial J'_3} dJ'_3 > 0. \quad (11.2)$$

反之, 虽然使应力变化, 但应力点却向屈服曲綫內側移动, 这时塑性应变并不发生变化, 这叫作卸载。  $df < 0$  是和卸载相对应的。使应力变化而应力点却仍然沿着同一屈服曲綫移动时, 其塑性应变也不发生变化, 这叫作中性。此时有  $df = 0$ 。在上述三者的任何情况下 ( $df > 0$ ,  $df = 0$ ,  $df < 0$ ), 其彈性应变增量都由(10.2)給出来。

其次求塑性应变增量和应力增量間的关系。为了使塑性应变增量滿足对于中性变化为零的条件, 先設

$$d\epsilon_{ij}^p = G_{ij} df, \quad (11.3)$$

然后再将由实验所得塑性的体积变化为零的結果应用到理論里来, 就得到条件

$$G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0.$$

再假定材料是各向同性的, 則塑性应变增量張量的主軸和主应力軸一致, 于是  $G_{ij}$  的主軸也必和主应力軸一致。若設

$$G_{ij} = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11.4)$$

时, 則这些条件可以充分普遍地得到滿足。这里  $g$  及  $h$  是  $J'_2, J'_3$  的数量函数, 也可以是应变路綫的函数。由(11.3), (11.4)得到塑



性应变增量和应力增量間的关系式

$$d\epsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} df, \quad (11.5)$$

或者稍作一些計算,变成

$$d\epsilon_{ij}^p = h \left( \frac{\partial \sigma}{\partial J_2} \sigma'_{ij} + \frac{\partial g}{\partial J_2} t_{ij} \right) df. \quad (11.6)$$

这里  $t_{ij} = \sigma'_{ik} \sigma'_{kj} - \frac{2}{3} J_2' \delta_{ij}$  是应力偏量的自乘偏量。将 (11.1) 代入到 (11.5) 里, 則有

$$d\epsilon_{ij}^p = h F' \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ik} d\epsilon_{ki}). \quad (11.7)$$

这里  $F'$  是对其参数作出的导数。将 (11.7) 兩側乘以  $\sigma_{ij}$  再作总和, 更設  $g$  是  $\sigma_{ij}$  的  $n$  阶齐次函数, 則有  $\sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = ng$ , 所以 (11.7) 变成

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = h F' \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} \sigma_{ik} d\epsilon_{ki} = nh F' g \sigma_{ik} d\epsilon_{ki},$$

从而得到

$$nh F' g = 1. \quad (11.8)$$

这便是  $g$  和  $h$  間的关系。利用 (11.8) 由 (11.5) 消去  $h$ , 得

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{ng} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{df}{F'}, \quad df \geq 0. \quad (11.9)$$

$f, g, F$  都是用实验資料所决定的。(11.9) 是一般的应力增量和塑性应变增量間的关系, 作为 (11.9) 的特例的应力增量和应变增量关系式, 在历史上曾經推导出来, 下面將予以說明。

## § 12 对于强化材料的 Prandtl-Reuss 方程

Prandtl 和 Reuss 曾提出如下方程

$$\frac{d\epsilon_x^p}{\sigma_x'} = \frac{d\epsilon_y^p}{\sigma_y'} = \frac{d\epsilon_z^p}{\sigma_z'} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{xz}^p}{2\tau_{xz}} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}, \quad (12.1)$$

即

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda. \quad (12.2)$$

这里  $d\lambda$  是一个数量的比例常数。塑性功是  $dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ , 在此式内代入 (12.2), 得到  $dW_p = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\lambda$ . 由于  $dW_p \geq 0$ , 所以  $d\lambda \geq 0$ , 即  $d\lambda$  是正值数量。比较 (12.2) 和 (11.9), 就可以看出 (12.2) 是在 (11.9) 命  $g = J'_2$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$ ,  $n=2$  而得来的, 所以此时 (11.9) 变成

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\sigma'_{ij}}{2J'_2} \frac{df}{F'} \quad (df \geq 0). \quad (12.3)$$

若设

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}\}^{\frac{1}{2}}, \quad d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p\}^{\frac{1}{2}}, \quad (12.4) \textcircled{1}$$

则由 (12.2) 得到  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p$ . 于是 (11.1) 变为

$$f(J'_2, J'_3) = F\left(\int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p\right). \quad (12.5)$$

以后采用 Mises 屈服条件  $f = \bar{\sigma} = \sqrt{3 J'_2}$  时, (12.5) 就变成

$$\bar{\sigma} = F\left(\int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p\right). \quad (12.6)$$

关系式 (12.3) 也就变为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3\sigma'_{ij} d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}^2 F'}, \quad F' = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (d\bar{\sigma} \geq 0). \quad (12.7)$$

但从关系式 (12.6) 可以看出, 此时的  $\bar{\sigma}$  仅为  $\int d\bar{\varepsilon}^p$  的函数。所以若用

$$\bar{\sigma} = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) \quad (12.8)$$

代替 (12.6) 时, 则有  $F' = H'/\bar{\sigma}$ . 总括以上各点, 得到总的应力应变关系式:

① (12.4) 里的  $\bar{\sigma}$  叫作广义应力、有效应力或相当应力, 若  $\sigma_z$  以外的应力分量都是零时, 就有关系式  $\bar{\sigma} = \sigma_z$ .

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{3\sigma'_{ij}d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}H'}, & d\bar{\sigma} \geq 0, \\ d\varepsilon_{ij} &= \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}, & d\bar{\sigma} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

若用增量除以  $dt$  ( $t$  是時間) 而得的所謂速度代替增量, 并用加上点( $\dot{\phantom{x}}$ )的記号表示时, 則(12.9)变成

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \frac{3\sigma'_{ij}\dot{\bar{\sigma}}}{2\bar{\sigma}H'}, & \dot{\bar{\sigma}} \geq 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}, & \dot{\bar{\sigma}} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

(12.9) 及 (12.10) 叫作强化材料的 Prandtl-Reuss 方程。

現在求 (12.9) 的逆关系。將 (12.9) 的第一式兩側乘以  $\sigma'_{ij}$  并作总和, 得到

$$\bar{\sigma} \left( \frac{1}{3G} + \frac{1}{H'} \right) d\bar{\sigma} = \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (12.11)$$

因材料是强化的, 所以  $H' > 0$ . 于是  $d\bar{\sigma} > 0$  是和  $\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$  相对应的。有了这些准备就可以解 (12.9), 得到

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \frac{E}{1-2\nu} d\varepsilon \delta_{ij} + 2G \left[ d\varepsilon'_{ij} - \frac{\sigma'_{ij} d\varepsilon_{kk}}{\frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left( \frac{H'}{3G} + 1 \right)} \right], & \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0, \\ d\sigma_{ij} &= \frac{E}{1-2\nu} d\varepsilon \delta_{ij} + 2G d\varepsilon'_{ij}, & \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

这里  $d\varepsilon = \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33})$ . 所以 (12.9) 是当已知应力增量为  $d\sigma_{ij}$  时, 确定应变增量的关系式。(12.12) 是当已知应变增量  $d\varepsilon_{ij}$  时, 确定应力增量的关系式。

### § 13 理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程

現在考虑在屈服点以前一直作彈性变形, 而以后在一定屈服

应力下进行塑性变形的材料。在这种材料的应力应变关系式 (12.9) 里, 可以設

$$\lim_{d\bar{\sigma} \rightarrow 0, H' \rightarrow 0} \frac{3d\bar{\sigma}}{2\sigma H'} \equiv d\lambda, \quad (13.1)$$

这里  $d\lambda$  是正值的不定数量。应力应变关系变为

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\sigma'_{ij} = 0 \text{ 时, 有} \\ &\quad d\epsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \sigma'_{ij}d\lambda; \\ &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} < 2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} < 0 \text{ 时, 有} \\ &\quad d\epsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

这里  $k$  是常数。若用速度形状写出, 則 (13.2) 变为

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} = 0 \text{ 时, 有} \\ &\quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}\delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \mu\sigma'_{ij}; \\ &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} < 2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} < 0 \text{ 时, 有} \\ &\quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}\delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

这里曾設  $\frac{d\lambda}{dt} \equiv \mu > 0$ , (13.2) 的逆关系可求得如下: 首先由 (13.2)

的第一式, 在  $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2$  且  $\sigma'_{ij}d\sigma'_{ij} = 0$  时, 有

$$d\epsilon'_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \sigma'_{ij}d\lambda, \quad (13.4)$$

兩側乘以  $\sigma'_{ij}$  并作总和, 則得

$$\sigma'_{ij}d\epsilon_{ij} = 2k^2d\lambda. \quad (13.5)$$

于是验证了  $d\lambda > 0$  是对应于  $\sigma'_{ij}d\epsilon_{ij} > 0$  的。作了这些准备就可以解出 (13.2), 得

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\epsilon_{ij}>0 \text{ 时,} \\ &\quad d\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}d\epsilon_{ij}+2G\left\{ds'_{ij}-\frac{\sigma'_{kl}d\epsilon_{kl}}{2k^2}\sigma'_{ij}\right\}; \\ &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\epsilon_{ij}<0 \text{ 时,} \\ &\quad d\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}d\epsilon_{ij}+2Gds'_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

(13.2)和(13.6)是理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程。

对于理想塑性材料,已知应力增量时应变增量不能完全决定,而已知应变增量时应力增量却可以唯一地决定。这个道理对于这种材料在屈服时作简单拉伸的情形是容易理解的。

#### § 14 Saint Venant-Levy-Mises 方程

Saint Venant-Levy-Mises 方程,是在前节导出的各式里将弹性应变增量看成比塑性应变增量小得多而略去后得到的。也就是在弹性阶段,考虑  $E \rightarrow \infty$ ,  $G \rightarrow \infty$  的那样的材料。这样的材料叫作刚塑性材料,在屈服点以前它是刚体。

对于理想刚塑性材料的应力应变关系式,利用(13.3)可以立即求出如下:

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}=0 \text{ 时, } \dot{\epsilon}_{ij}=\mu\sigma'_{ij}; \\ &\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}<0 \text{ 时, } \dot{\epsilon}_{ij}=0. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

将(14.1)第一式的两边平方后再对  $i, j$  作总和时,由于  $\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}=\mu^2\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2\mu^2$ , 因而得  $\mu=\sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}/\sqrt{2}k$ . 从而(14.1)的逆关系式是

$$\sigma'_{ij}=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}}\dot{\epsilon}_{ij}. \quad (14.2)$$

(14.1)及(14.2)叫作理想刚塑性材料的 Saint Venant-Levy-Mises 方程。

## 第4章 塑性論的变分原理

在第2章 §7 及 §8 里曾經敘述微小变位彈性論的变分原理。本章將指出在塑性論里也有類似的变分原理。

### §15 强化材料

我們將採用在(11.5)內設  $g=f$  而得到的

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (15.1)$$

當作强化材料的应力应变关系式。式中  $h$  及  $f$  都是  $J_2'$  及  $J_3'$  的正值确定函数。將 Prandtl-Reuss 方程看作 (15.1) 式的特例。这时可以將 (10.2) 和 (15.1) 等式組合起来，把应变增量写成下列式子：

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \alpha h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df. \quad (15.2)$$

假設  $\alpha$  滿足如下关系：

当  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $df > 0$  时， $\alpha = 1$ ；

当  $f(\sigma_{ij}) < c$  或  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $df \leq 0$  时， $\alpha = 0$ 。

这里的  $c$  和 (9.4) 的相同，是表示强化的最終状态的参数，其值随場所而变，且設是預先指定的。为了求 (15.2) 的逆关系，将它两边乘以  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  并作总和，則得关系式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1}{2G} + h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) df. \quad (15.3)$$

由此确定  $df > 0$  是和  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$  相对应的以后，再解 (15.2) 則得

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} d\epsilon_{ij} + 2G \left[ d\epsilon'_{ij} - \alpha \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} \right)}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (15.4)$$

这里  $\alpha$  满足如下条件:

当  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} > 0$  时, 有  $\alpha = 1$ ;

当  $f(\sigma_{ij}) < c$  或  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} \leq 0$  时, 有  $\alpha = 0$ .

作为研究对象的問題, 和第3章开头叙述的問題完全一样。即正确解在满足 (15.2) 或 (15.4) 等应力应变关系式外, 还必须满足如下諸条件:

$$\text{平衡方程: } (d\sigma_{ij})_{,j} = 0; \quad (15.5)$$

$$\text{协调条件: } d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right]; \quad (15.6)$$

$$\text{边界条件: 在 } S_1 \text{ 上 } d\sigma_{ij}n_j = d\bar{F}_i; \quad (15.7)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } du_i = d\bar{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (15.8)$$

关于此問題有如下两个变分原理。

**第一变分原理** “設满足几何边界条件 (15.8) 的一組变位增量为  $du_i^*$ , 由协调条件 (15.6) 自  $du_i^*$  导出的应变增量为  $d\epsilon_{ij}^*$ , 那末使

$$\iiint_V dA^* dv - \iint_{S_1} d\bar{F}_i du_i^* dS \quad (15.9)$$

取极小值时, 便得到正确解。这里  $dA^*$  是将

$$dA = \frac{3E}{2(1-2\nu)} (d\epsilon)^2 + G \left[ d\epsilon'_{ij} d\epsilon'_{ij} - \frac{\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} \right)^2}{\frac{1}{2Gh} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \right] \quad (15.10)$$

的  $d\epsilon_{ij}$  各代以  $d\epsilon_{ij}^*$  而得到的。”

**第二变分原理** “設滿足平衡方程 (15.5) 及力学边界条件 (15.7) 的一組应力为  $d\sigma_{ij}^*$ , 那末使

$$\iiint_V dB^* d\varphi - \iint_{S_0} d\sigma_{ij}^* n_j d\bar{u}_i dS \quad (15.11)$$

取极小值时, 得到了正确解。这里  $dB^*$  是将

$$dB = \frac{3(1-2\nu)}{2E} (d\sigma)^2 + \frac{d\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{4G} + \frac{1}{2} \alpha h (df)^2 \quad (15.12)$$

的  $d\sigma_{ij}$  各代以  $d\sigma_{ij}^*$  而得到的。”

这两个变分原理的証明, 可以参閱书末文献[9] 的 63~64 頁 (日譯本 62~63 頁)。

## § 16 理想塑性材料

在 (15.2) 內設  $h=1/\beta$  ( $\beta$  是常数), 且

$$\lim_{\beta \rightarrow 0, df \rightarrow 0} \frac{df}{\beta} = d\lambda \quad (d\lambda \text{ 是正值不定量})$$

时, 就得到理想塑性材料的应力应变关系式, 即

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma \delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \alpha \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda. \quad (16.1)$$

这里設

$f(\sigma_{ij}) = c$  (常数) 且  $df=0$  时有  $\alpha=1$ ;

$f(\sigma_{ij}) < c$  或  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $df < 0$  时有  $\alpha=0$ .

为了求 (16.1) 的逆关系式, 首先确定

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (16.2)$$

成立, 且  $d\lambda > 0$  是对应于  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$  的, 然后解 (16.1) 就得到

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} d\varepsilon \delta_{ij} + 2G \left[ d\varepsilon'_{ij} - \alpha \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]. \quad (16.3)$$



这里

当  $f(\sigma_{ij}) = c$  (常数) 且  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} > 0$  时有  $\alpha = 1$ ;

当  $f(\sigma_{ij}) < c$  或  $f(\sigma_{ij}) = c$  且  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} \leq 0$  时有  $\alpha = 0$ .

对于具有应力应变关系(16.1)或(16.3)的理想塑性材料,也有和§15同样的两个变分原理。除去应力应变关系式以外的其他条件,即(15.5), (15.6), (15.7), (15.8)都和§15完全同样,变分原理的表述也和§15完全同样,只是在理想塑性材料的情形  $dA$  不是(15.10),而是

$$dA = \frac{3E}{2(1-2\nu)} (d\epsilon)^2 + G \left[ d\epsilon'_{ij} d\epsilon'_{ij} - \frac{\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl} \right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \right], \quad (16.4)$$

且  $dB$  不是(15.12)而是

$$dB = \frac{3(1-2\nu)}{2E} (d\sigma)^2 + \frac{d\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{4G}. \quad (16.5)$$

关于理想塑性材料的变分原理的证明,可参阅书末文献[9]的63~64页(日译本62~63页)。

## § 17 理想剛塑性材料

本节将叙述具有第3章§14所处理的应力应变关系的理想剛塑性材料在全区域塑性状态时的变分原理。此时的問題乃由以下諸条件所决定:

$$\text{平衡方程:} \quad \sigma_{ij,j} = 0; \quad (17.1)$$

$$\text{应力应变关系:} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \mu \sigma'_{ij}, \quad (17.2)$$

$$\text{或} \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}} \dot{\epsilon}_{ij}; \quad (17.2')$$

$$\text{协调条件:} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right]; \quad (17.3)$$

$$\text{边界条件: 在 } S_1 \text{ 上 } F_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i; \quad (17.4)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } \dot{u}_i = \bar{\dot{u}}_i (i, j=1, 2, 3). \quad (17.5)$$

由 (17.2) 显然可以看出剛塑性材料是不可壓縮的, 即

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = 0.$$

**第一变分原理** “設滿足几何边界条件 (17.5) 的一組变位速度为  $\dot{u}_i^*$ , 利用协调条件 (17.3) 自  $\dot{u}_i^*$  导出的应变速度分量为  $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ , 且  $\dot{\varepsilon}_{ii}^*$  滿足不可壓縮条件  $\dot{\varepsilon}_{ii}^* = 0$ , 那末使

$$\Phi^* = \sqrt{2k} \iiint_V \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*} dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i \dot{u}_i^* dS \quad (17.6)$$

取极小值时, 就得到了正确解。这个原理叫作 Markoff 原理。”

**证明** 設正确解的应变速度及变位速度各为  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  及  $\dot{u}_i$ , 且将正确解的  $\Phi^*$  写成  $\Phi$ . 首先改写 Schwarz 不等式

$$\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \geq \dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}$$

成如下形状:

$$\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*} - \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \geq \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}}. \quad (17.7)$$

另一方面, 因为

$$\begin{aligned} \Phi^* - \Phi &= \sqrt{2k} \left[ \iiint_V (\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*} - \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}) dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \right] \\ &\geq \sqrt{2k} \left[ \iiint_V \frac{\dot{\varepsilon}_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij})}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}} dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \right] \quad [\text{由 (17.7)}] \\ &= \iiint_V \sigma'_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij}) dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \quad [\text{由 (17.2')}] \\ &= \iiint_V \sigma_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij}) dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \quad [\because \dot{\varepsilon}_{ii}^* = \dot{\varepsilon}_{ii} = 0] \\ &= - \iiint_V \sigma_{ij,j} (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dv + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{F}_i) (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \\ &\quad + \iint_{S_2} \sigma_{ij} n_j (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i) dS \quad [\text{Green 定理}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以必有  $\Phi^* \geq \Phi$ .

在講第二變分原理之前,先證明下列引理:

**引理** 設有滿足平衡方程的兩組應力  $\sigma_{ij}^*$  及  $\sigma_{ij}$ , 若  $\sigma_{ij}^{*,j} = \sigma_{ij}^{,j}$  時,必有  $\sigma^* - \sigma = \text{常數}$ .

證明很簡單,因為

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} + \sigma \delta_{ij}, & \sigma_{ij}^* &= \sigma'^*_{ij} + \sigma^* \delta_{ij}, \\ \sigma_{ij,j} &= 0, & \sigma_{ij,j}^* &= 0, & \sigma'_{ij} &= \sigma'^*_{ij}.\end{aligned}$$

所以有  $(\sigma - \sigma^*)_{,i} = 0$  ( $i=1, 2, 3$ ), 於是  $\sigma^* - \sigma = \text{常數}$ .

若選取  $\sigma_{ij}^*$  及  $\sigma_{ij}$ , 使它們在  $S_1$  上滿足  $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij}^* n_j = \bar{P}_i$  時,就可以證明在  $S_1$  上有  $\sigma = \sigma^*$ , 所以只要是在  $S_1 \neq 0$  的範圍內,就必有  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ . 作了這些準備,就可以開始敘述第二變分原理如下。

**第二變分原理** “設滿足平衡方程 (17.1) 和屈服條件  $\sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* = 2k^2$  以及在  $S_1$  上的力學邊界條件 (17.4) 的一組應力為  $\sigma_{ij}^*$ , 那末使

$$\iint_{S_1} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \quad (17.8)$$

取最大值時就得到了正確解。即已知  $\bar{u}_i$  時真實的表面力所作的功都比其他任何比較解的表面力所作的功為大。這個原理叫作 Hill 的最大塑性功原理。”

**證明** 設正確解的應力和應變速度及變位速度各為  $\sigma_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\dot{u}_i$  時,則

$$\begin{aligned}& \iint_{S_1} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS - \iint_{S_1} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \\ &= \iint_{S_1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \bar{u}_i dS \\ &= \iint_{S_1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \dot{u}_i dS + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \bar{u}_i dS\end{aligned}$$

[ $\because$  在  $S_1$  上  $\sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij}^* n_j$ ]

$$\begin{aligned}
&= \iiint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij} dv \quad [\text{由 Green 定理及 } \sigma_{ij,j} = \sigma_{ij,j}^* = 0] \\
&= \iiint (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij} dv \quad [\because \dot{\varepsilon}_{ii} = 0] \\
&= \iiint \mu (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) \sigma'_{ij} dv. \quad [\text{由 (17.2)}] \quad (17.9)
\end{aligned}$$

而  $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2k^2$ , 又由 Schwarz 不等式有

$$\sigma'_{ij}\sigma''_{ij} \leq \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \sqrt{\sigma''_{ij}\sigma''_{ij}} = \sqrt{2}k \cdot \sqrt{2}k,$$

所以

$$(\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) \sigma'_{ij} \geq 0. \quad (17.10)$$

而且仅当  $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$  时, (17.10) 的等号才能成立。然而由上述引理可知, 只要  $S_1 \neq 0$ , 由  $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$  就可以得到  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ , 所以由 (17.9) 及 (17.10) 可知第二变分原理必成立。当  $S_1 = 0$  即全边界条件由  $\bar{u}_0$  确定时, 那末 (17.8) 的后面一半就必须改为“……取最大值时就得到了正确解或得到了和正确解仅差一个各向相等应力的应力系统……”才可以。这一点由于材料的不可压缩性很容易理解。

## 第5章 平面塑性应变問題

### §18 平面塑性应变問題的基本方程

本章将处理理想剛塑性材料的平面应变問題。在平面应变問題里，适当选取坐标轴  $x, y, z$  时，就可以使塑性流动完全发生在平行于  $xy$  平面的平面上，而和  $z$  无关。于是应力分量仅有  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ ，平衡方程变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

最后一式只是指出  $\sigma_z$  和  $z$  无关，以后可以不予以考虑。理想剛塑性材料的应力应变关系由 (14.1) 得到

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma'_x} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma'_y} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma'_z} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2\tau_{xy}}. \quad (18.2)$$

因为是平面应变問題，所以有  $\dot{\epsilon}_z = 0$ ，于是由 (18.2) 必有  $\sigma'_z = 0$ ，即

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (18.3)$$

那末屈服条件变为

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (18.4)$$

即在屈服域里的最大剪切应力为  $k$ 。如图 18.1，設最大剪切应力方向和

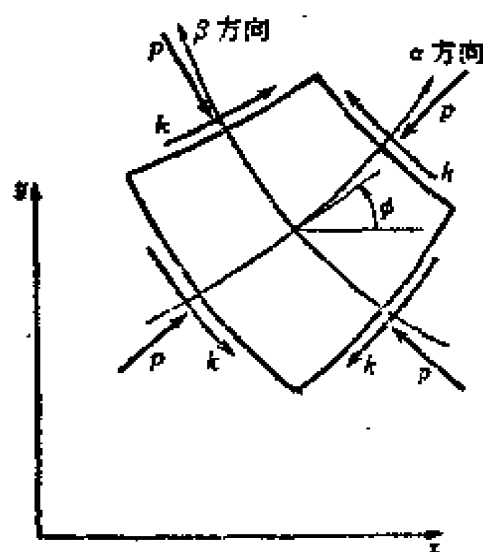


图 18.1 滑移綫

$\alpha$  轴间的夹角是  $\phi$ , 则由方程

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi, \quad \frac{dy}{dx} = -\cot \phi \quad (18.5)$$

所决定的曲线叫作是大剪切应力线或滑移线。由 (18.5) 的第一式所定的方向叫作  $\alpha$  方向, 第二式所定的是  $\beta$  方向。显然可以由图推知,  $k$  的正方向和  $\alpha, \beta$  坐标间的关系, 恰好和  $\tau_{xy}$  的正方向和  $x, y$  坐标间的关系一样。若命  $p = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ , 则由图 18.2

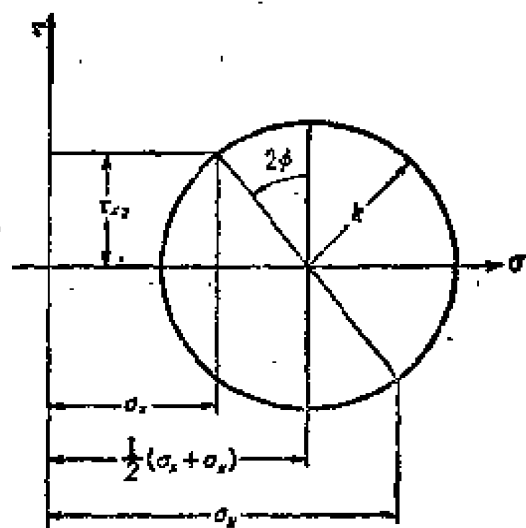


图 18.2 Mohr 圆

的 Mohr 圆得出下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - k \sin 2\phi, \\ \sigma_y &= -p + k \sin 2\phi, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\phi. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

将 (18.6) 代入到 (18.1) 里, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + 2k \left( \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} + 2k \left( \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

利用附录 II 的理论, 则 (18.7) 的特征曲线方向由  $D=0$ , 即

$$\begin{vmatrix} -dy & -2k \cos 2\phi dy + 2k \sin 2\phi dx \\ dx & -2k \sin 2\phi dy - 2k \cos 2\phi dx \end{vmatrix} = 0 \quad (18.8)$$

可知必为

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi, \quad \frac{dy}{dx} = -\cot \phi. \quad (18.9)$$

即 (18.7) 的特征曲线方向和滑移线的方向相重。

其次, 由条件  $V=0$ , 即

$$\begin{vmatrix} -dy & -dp - 2k \cos 2\phi d\phi \\ dx & -2k \sin 2\phi d\phi \end{vmatrix} = 0 \quad (18.10)$$

得

$$dp(2k \sin 2\phi) d\phi + dx(dp + 2k \cos 2\phi d\phi) = 0, \quad (18.11)$$

因为在  $\alpha$  方向有  $\frac{dp}{dx} = \tan \phi$ , 所以由 (18.11) 得  $d(p + 2k\phi) = 0$ ; 又在  $\beta$  方向有  $\frac{dy}{dx} = -\cot \phi$ , 所以由 (18.11) 得  $d(p - 2k\phi) = 0$ . 于是由  $V = 0$  得到如下结论:

$$\left. \begin{array}{l} \text{沿着 } \alpha \text{ 曲线有 } p + 2k\phi = \text{常数}, \\ \text{沿着 } \beta \text{ 曲线有 } p - 2k\phi = \text{常数}. \end{array} \right\} \quad (18.12)$$

若设在所考虑的点  $(x, y)$  上, 物体元素的变位速度的  $x$  轴方向和  $y$  轴方向的分量各为  $v_x$  及  $v_y$ , 则有

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (18.13)$$

所以 (18.2) 变成

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y}}{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{2\tau_{xy}}. \quad (18.14)$$

由此得到

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - a\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0. \quad (18.15)$$

其中  $a \equiv \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\cot 2\phi$ . 对于 (18.15) 使用特征曲线论的方法, 则  $D = 0$  变成

$$\begin{vmatrix} -dp & dx \\ a dy + dx & -dp + a dx \end{vmatrix} = 0. \quad (18.16)$$

将此式变形后得到

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi, \quad \frac{dx}{dy} = -\cot \phi, \quad (18.17)$$

亦即,关于  $v_x$  及  $v_y$  的特征曲线也和滑移线相重。而  $V=0$  是

$$\begin{vmatrix} -dy & -dv_x \\ ady+dx & adv_x-dv_y \end{vmatrix} = 0, \quad (18.18)$$

将它加以变化,得到

$$dv_y \frac{dy}{dx} + dv_x = 0. \quad (18.19)$$

今后,但只限于本章,将所考虑的点的变位速度在  $\alpha, \beta$  曲线方向的分量命为  $u, v$  时,则得

$$v_x = u \cos \phi - v \sin \phi,$$

$$v_y = u \sin \phi + v \cos \phi.$$

由这二式及 (18.9), (18.17) 得到

下列结果:

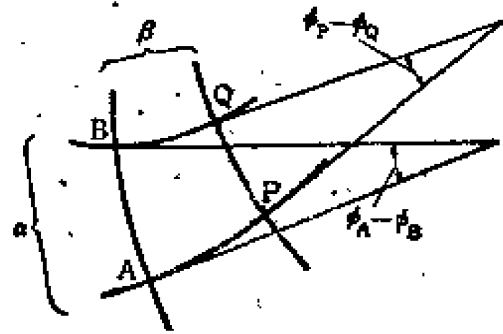


图 18.3 Hencky 第一定理

$$\left. \begin{array}{l} \text{沿着 } \alpha \text{ 曲线有 } du - v d\phi = 0, \\ \text{沿着 } \beta \text{ 曲线有 } dv + u d\phi = 0. \end{array} \right\} \quad (18.20)$$

这里将提出关于滑移线场的 Hencky 定理。考虑两条  $\alpha$  曲线  $AP$  及  $BQ$  和两条  $\beta$  曲线  $AB$  及  $PQ$  所包围的曲线四边形  $ABQP$ 。由 (18.12) 有

$$p_Q - p_A = (p_Q - p_B) + (p_B - p_A) = 2k(2\phi_B - \phi_Q - \phi_A),$$

$$p_Q - p_A = (p_Q - p_P) + (p_P - p_A) = 2k(\phi_Q + \phi_A - 2\phi_P),$$

所以必有

$$\phi_Q - \phi_P = \phi_B - \phi_A. \quad (18.21)$$

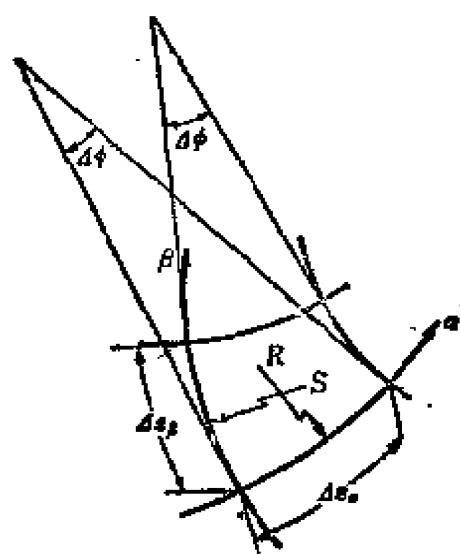
这便是所谓 Hencky 第一定理。

若命  $\alpha$  曲线和  $\beta$  曲线的曲率半径各为  $R$  及  $S$ , 那末就可以用下列关系将它们定义,但必须注意  $R$  及  $S$  的正负号(图 18.4):

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ 曲线: } \frac{1}{R} = \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha}, \\ \beta \text{ 曲线: } \frac{1}{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} \end{array} \right\} \quad (18.22)$$



由几何关系及 Hencky 第一定理,得



$$R \Delta \phi = \Delta s_\alpha,$$

$$\left[ R + \frac{\partial R}{\partial s_\beta} \Delta s_\beta \right] \Delta \phi = \Delta s_\alpha - \Delta s_\beta \cdot \Delta \phi,$$

所以必有  $\partial R / \partial s_\beta = -1$ , 同理可得

$$\frac{\partial R}{\partial s_\beta} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial s_\alpha} = -1. \quad (18.23)$$

把(18.22)和(18.23)组合起来,得到

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 曲线有 } dS + R d\phi &= 0, \\ \text{沿 } \beta \text{ 曲线有 } dR - S d\phi &= 0. \end{aligned} \right\} (18.24)$$

这便是 Hencky 第二定理。

图 18.4  $R, S$  正方向的定义  
及 Hencky 第二定理

上面已将平面塑性应变問題的基本公式求出。利用这些結果便可以用

数值計算法得出滑移綫場 (參閱书末文献[9]的140~151頁;日譯本138~150頁)。今因篇幅所限,不討論数值第法,仅說明平面应变問題的解析的积分方法。

### § 19 平面塑性应变問題方程的解析积分法

以前只是用到  $\alpha$  曲线和  $\beta$  曲线的名称,至于它們的参数的大小却未曾指定。今后将按照图 19.1,选取那样的  $\alpha$  曲线  $OA$  和  $\beta$  曲线  $OB$  作为直交曲线坐标的基綫,借此决定点  $P$  的坐标  $(\alpha, \beta)$ 。但  $\phi$  的正值規定为自  $O$  所作的切綫  $Ox$  循反时針方向测量所得的值,于是  $\alpha$  是經過  $P$  的  $\beta$  曲线数  $OA$  上的点  $A$  的  $\phi$  值,  $\beta$  是經過  $P$  的  $\alpha$  曲线交截  $OB$  上的点  $B$  的  $\phi$  值。

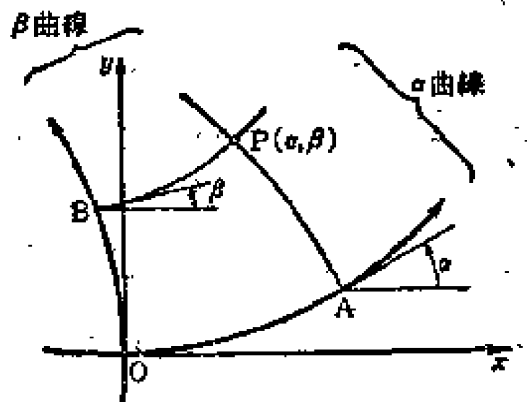


图 19.1  $\alpha, \beta$  的定义

从而  $\alpha$  沿着  $\beta$  曲线保持定值,  $\beta$  沿着  $\alpha$  曲线也保持定值。按照 Hencky 第一定理有  $\phi_P = \alpha + \beta$ , 但沿着  $\alpha$  曲线有  $d\phi = d\alpha$ , 沿着  $\beta$  曲线有  $d\phi = d\beta$ , 所以 (18.20) 及 (18.24) 变为

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} + u = 0, \quad (18.20')$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} - S = 0. \quad (18.24')$$

可知  $u, v, R, S$  都满足同一个微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0. \quad (19.1)$$

这便是所谓电信方程, 可用 Riemann 方法求出它的积分。若仅将结果写出来, 则得如下形式 (参看书末文献 [9] 的 151~157 页; 日译本 150~156 页)。

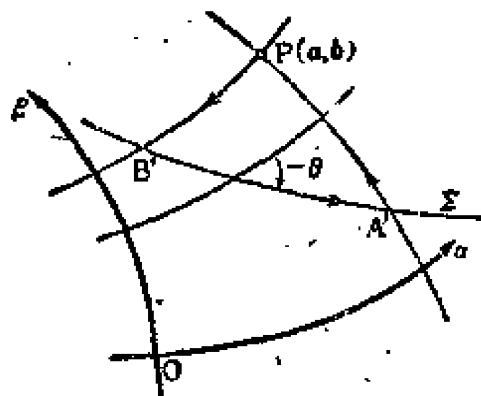


图 19.2 在  $\Sigma$  上给出  $f$  及  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

(1) 在不是滑移曲线的曲线  $\Sigma$  上给出  $f$  及  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$  时 (参看图 19.2), 有

$$f_P = \frac{1}{2} (f_A + f_B) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left\{ \left( G \frac{\partial f}{\partial \alpha} - f \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left( f \frac{\partial G}{\partial \beta} - G \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) d\beta \right\}. \quad (19.2)$$

这里  $G(a, b, \alpha, \beta) = J_0 \{ 2 \sqrt{(a \pm \alpha)(b - \beta)} \}$ , 但  $J_0$  表示零阶 Bessel 函数。若将  $\frac{\partial f}{\partial \beta}$  用  $\Sigma$  方向的微分  $\frac{\partial}{\partial s}$  表示出来时, 则可由关系式

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{S} \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

求出。这里  $\theta$  是  $\alpha$  曲线和曲线  $\Sigma$  的切线夹角, 且自  $\alpha$  到  $\Sigma$  沿着反时针的方向量取的。

(2) 在二相交滑移綫上确定  $f$  时 (看图 19.3), 有

$$\begin{aligned} f(a, b) = & J_0\{2\sqrt{ab}\}f(0, 0) \\ & + \int_0^a J_0\{2\sqrt{(a-\alpha)b}\}\frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha \\ & + \int_0^b J_0\{2\sqrt{a(b-\beta)}\}\frac{\partial f}{\partial \beta}d\beta. \end{aligned} \quad (19.3)$$

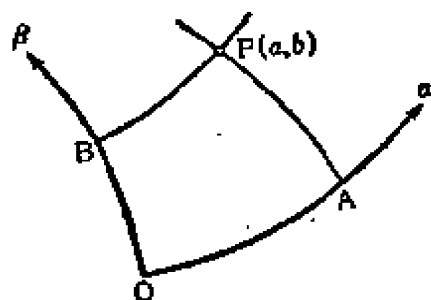


图 19.3 在相交滑移綫  
OA, OB 上确定  $f$

在图 19.4 里表示出由半径为  $r$  的两个圆弧构成的滑移綫 OA 及 OB 所确定的滑移場, 可以由 (19.3) 計算出来。

例如計算  $R(a, b)$  时, 在 OA 上的  $R$  等于  $-r$ , OB 上的  $S$  也等于  $-r$ 。若注意到在 OB 上有

$$R = -r(1 + \beta),$$

和在全区域内  $\alpha$  是負的而  $\beta$  是正的, 于是由 (18.24') 便得到

$$\left| \frac{R(a, b)}{r} \right| = I_0\{2\sqrt{|ab|}\} + \sqrt{|b/a|}I_1\{2\sqrt{|ab|}\}. \quad (19.4)$$

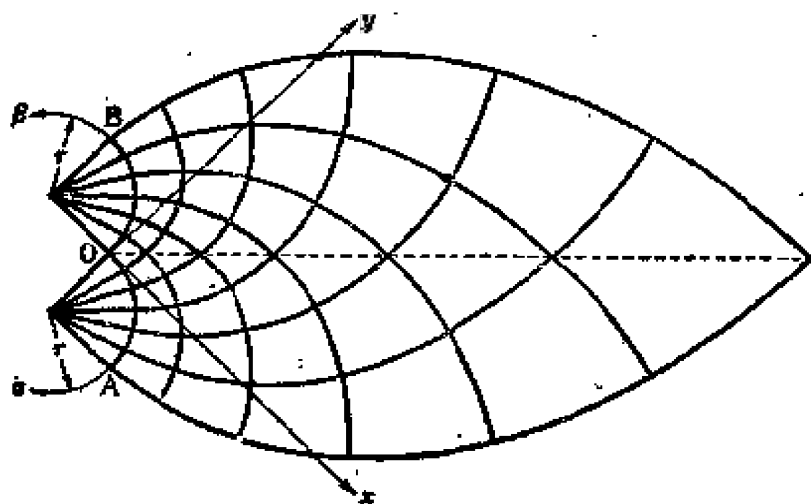


图 19.4 半径为  $r$  的圆弧构成的滑移綫  
OA 及 OB 所确定的滑移場

## § 20 平滑剛模抽拉薄模

通过具有傾角  $2\alpha$  的直綫剛壁和沒有摩擦力的平滑剛模而抽



## 第6章 极限分析

### §21 安全系数

本章所处理的材料都是满足应力应变关系(12.9)的理想塑性的 Prandtl-Reuss 材料。这种材料制成的结构在表面部分  $S_1$  上所受的外荷载命为  $F_i = \bar{F}_i (i=1, 2, 3)$ ,  $\bar{F}_i$  叫作基准荷载。其命表面部分  $S_2$  上的边界条件命为变位  $u_i = 0 (i=1, 2, 3)$ 。满足这种边界条件的构件的应力通常不易计算, 因此需要改换另一种角度来将问题提出来, 即是考虑当所受的荷载为基准荷载的多少倍时, 该构件才发生破坏现象。

假设外荷载和  $\bar{F}_i$  按比例自零逐渐增加, 这样加载叫作比例加载。若命  $O$  是单调增加的参数, 则外荷载就按  $OF_i (i=1, 2, 3)$  而增加。在  $O$  的微小范围里, 即在低荷载的情形下, 构件具有弹性状态, 但当  $O$  达到一定值时, 构件内的某一个点开始达到屈服应力。 $O$  的值更加大时, 构件内的塑性域也逐渐扩大, 但在短暂的时间里, 这些塑性域被弹性区域包围着, 并不引起塑性流动。当继续增加  $O$  的值时, 塑性域继续扩大, 当  $O$  的值等于  $S$  时, 亦即外荷载达到  $S\bar{F}_i$  时, 就开始有了连续的塑性流动, 亦即对于这样的外荷载, 构件渐次变形, 已经不能承受大于  $S\bar{F}_i$  的外荷载了。这种荷载叫作破坏荷载。破坏荷载和基准荷载的比  $S$  就叫作安全系数。

极限分析的目的就是求安全系数。实际上理想塑性的 Prandtl-Reuss 材料在静荷载下发生破坏时, 就认为经历了上述的过程。所以可以将  $S$  看作是一个表示由基准荷载到破坏间有

多大的安全余地的数。

本章将叙述确定安全系数  $S$  的上下界的两个定理,但因篇幅限制仅处理平面应变问题,而略去证明。其详情见书末文献[11], [12]和它们里边所引用的文献。

## § 22 平面应变问题的极限分析的定理

在平面应变问题里,适当地选取坐标轴  $x, y, z$  时,可以使垂直于  $z$  轴的断面及边界条件都和  $z$  无关,这样就可以将它看作垂直于  $z$  轴的任意断面的二维问题。今设有如下边界条件:

在表面  $c_1$  部分

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha &= \bar{F}_x, \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha &= \bar{F}_y. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

在表面  $c_2$  部分

$$u=0, \quad v=0. \quad (22.2)$$

这里(22.1)左侧的  $\alpha$  是边界上外向法线和  $x$  轴的夹角,而且是从  $x$  轴到法线循着反时针方向测得的。(22.2)的  $u, v$  是变位。先定义下面的名词。

设有一组应力  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ , 且在物体所在的区域  $R$  的若干部分区域  $R_1, R_2, \dots, R_n$  里,  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  和它们对于  $x, y$  的一阶导数都是连续的,且在各部分区域里都满足

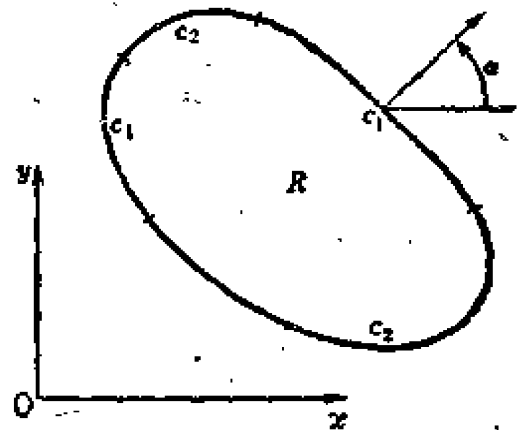


图 22.1  $xy$  断面

### (1) 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (22.3)$$

但在任意两个部分区域的边沿上,应力是否連續那是沒有关系的。假設通过边沿而作用的內力,其垂直分量  $N$  及切分量  $T$  也都是連續的,即在图 22.2 里,通过界綫  $L_{hk}$ ,  $R_k$  作用到  $R_h$  的內力命为

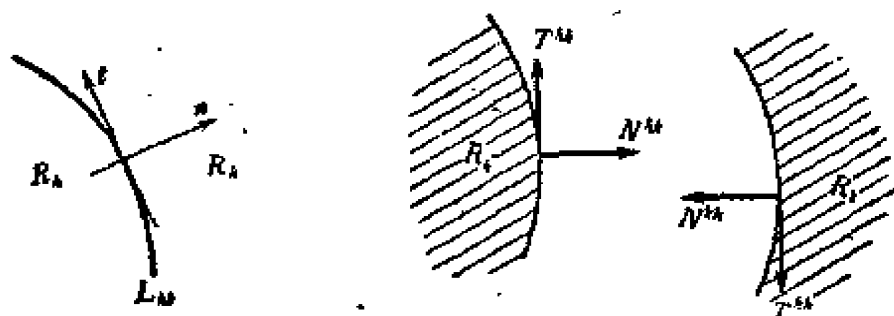


图 22.2 部分区域边界图(1)

$N^{hk}$  及  $T^{hk}$ , 而  $R_h$  作用到  $R_k$  的是  $N^{kh}$  及  $T^{kh}$  时,則必有

$$N^{hk} = N^{kh}, \quad T^{hk} = T^{kh}.$$

这个条件是作用和反作用原理的必然要求。这样的  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  如果还满足

(2)  $c_1$  上的力学边界条件 (22.1) 及

(3) 屈服条件

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 4k^2, \quad (22.4)$$

那末这組应力  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  对于边界条件 (22.1) 叫作靜定可許应力組。在承受破坏荷載的构件內,应力除以安全系数而得的应力是靜定可許的。

不用 (22.1), 而取

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha &= m_s \bar{F}_x, \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha &= m_s \bar{F}_y, \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

且滿足 (22.5), (22.3) 及 (22.4) 的  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  至少有一組存在时,則  $m_s \geq 1$  叫作靜定可許系数。

其次,設有一組变位速度  $(v_x, v_y)$ , 它們在各部分区域里連同它們对于  $x, y$  的一阶导数都是連續的,而且滿足 (1) 不可压縮条件

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (22.6)$$

及(2)几何边界条件

$$\text{在 } c_2 \text{ 上 } v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad (22.7)$$

和(3)条件

$$\int_{c_1} (\bar{F}_x v_x + \bar{F}_y v_y) ds > 0, \quad (22.8)$$

那末如图 22.3, 在界线  $L_{kk}$  上的垂直分量  $v_N$  必相等(即  $v_N^{(k)} = v_N^{(k')}$ ), 但切分量却不必相等(即不必有  $v_T^{(k)} = v_T^{(k')}$ ). 更设即使此时引起滑移, 上述条件也成立, 那末满足以上各条件的  $(v_x, v_y)$  就叫作运动学上可许的。承受破坏荷载时的速度场是运动学上可许的。运动学上可许的系数  $m_k$  定义如下:

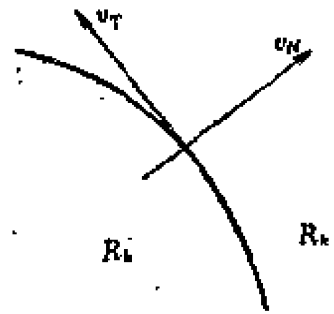


图 22.3 部分区域  
边界图(2)

$$m_k = k \frac{\left[ \iint_K \dot{I} dx dy + \sum_{L_{kk}} |v_T^{(k)} - v_T^{(k')}| dl_{kk} \right]}{\int_{c_1} (\bar{F}_x v_x + \bar{F}_y v_y) ds} \quad (22.9)$$

这里

$$\dot{I} = \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.10)$$

乃利用  $\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ ,  $\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$  将最大剪切应

变速度  $[(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}$  用  $v_x, v_y$  表示而得到的式子。积分

$\iint_K ( ) dx dy$  乃表示对物体全区域所作的积分,  $\sum \int_{L_{kk}} | | dl_{kk}$  则

表示沿着不连续线所作的积分之和。于是得到下列关系

$$m_s \leq S \leq m_k. \quad (22.11)$$



(22.11) 是极限分析里的基本不等式, 它给出安全系数  $S$  的上下界。证明太长只好从略。欲知其详者可参阅书末文献[11]的 213~222 页。下一节我们介绍一个简单的例题。

### § 23 具有圆孔的正方形管的安全系数<sup>[11]</sup>

设有一个正方形管, 它的中央是半径为  $a$  的圆孔, 而外边是边长为  $2b$  的正方形, 承受的內压为  $p$  (基准荷载)。我们求它的安全系数 (图 23.1)。这时, 边界条件都是力学边界条件。

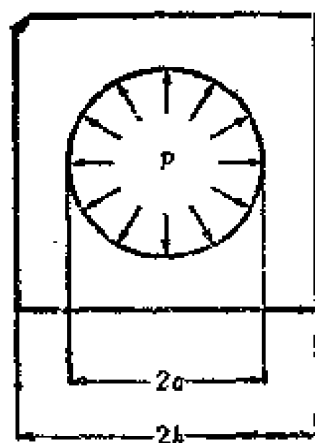


图 23.1 具有圆孔的正方形管

在求静定可许应力时, 利用外直径为  $2b$  内直径为  $2a$  的圆管, 假设它受有外压  $0$  及內压  $p^*$ , 而且设全部都处于塑性状态 (图 23.2)。即內压为  $p^*$ , 在圆管部分有  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$ , 正方形和虚线所画的圆间的部分的应力为  $0$ , 而且采用对应于外压  $0$  的应力作为静定可许应力 (图 23.3)。这个虚线圆就

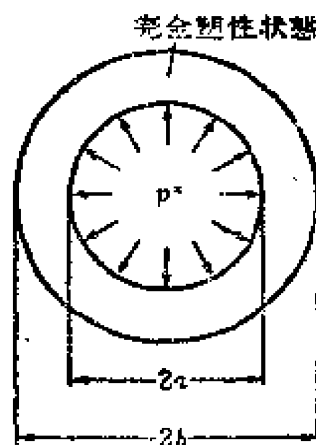


图 23.2 內压  $p^*$  且全部处于塑性状态的圆管

$$p^* = 2k \log \frac{b}{a}$$

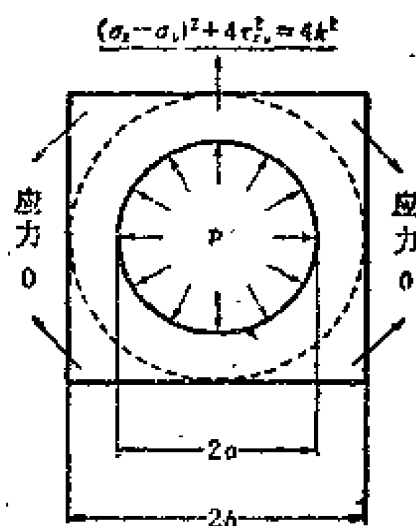


图 23.3 静定可许应力

是表示前面所說的应力不連續面。

內半徑是  $a$  外半徑是  $b$  的圓管到处都处在塑性状态, 即在  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$  的情形下, 內压  $p^*$  等于<sup>[11]</sup>

$$p^* = 2k \log \frac{b}{a}, \quad (23.1)$$

所以靜定可許系数  $m_s$  为

$$m_s = \frac{p^*}{p} = \frac{2k}{p} \log \frac{b}{a}. \quad (23.2)$$

其次, 为了計算  $m_k$ , 选取<sup>①</sup>

$$v_x = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{cy}{x^2 + y^2}. \quad (23.3)$$

由 (23.3) 所确定的速度場設有不連續面。这时应变速度是

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{c(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\dot{\epsilon}_y, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{4cxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (23.4)$$

易知它必然滿足条件 (22.6)。因为問題里沒有  $c_z$  部分, 故无須考虑条件 (22.7)。当适当地选取参数  $c$  的符号时, 則可以使它滿足条件 (22.8)。利用 (22.10) 作計算, 得  $\dot{\Gamma} = \frac{2c}{r^2}$ , 所以由 (22.9) 得出

$$m_k = \frac{2k \iint_R \frac{1}{r^2} dx dy}{p \int \frac{1}{a} ds} = \frac{2k}{p} \left[ \log \frac{b}{a} + 0.110 \right]. \quad (23.5)$$

由 (23.2) 及 (23.5) 得

$$\frac{2k}{p} \log \frac{b}{a} \leq S \leq \frac{2k}{p} \left[ \log \frac{b}{a} + 0.110 \right]. \quad (23.6)$$

命  $\frac{b}{a} = 1.5$ , 則 (23.6) 变为

$$0.811 \left( \frac{k}{p} \right) \leq S \leq 0.921 \left( \frac{k}{p} \right). \quad (23.7)$$

① (23.8) 是二維不可壓縮流体的流动的速度場。

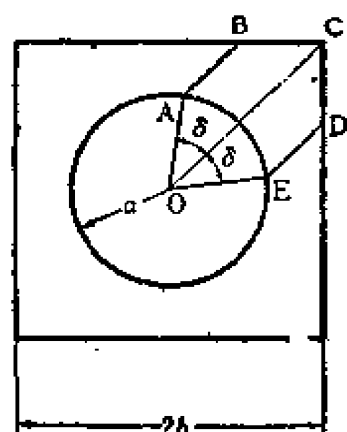


图 23.4 不連續面

在书末的文献 [13] 里, 为了求  $S$  的更好的上下界, 曾假定图 23.4 那样的不連續面, 即設不連續面平行于  $OC$ , 且沿着  $AB$ ,  $ED$  而发生。 $AEDCB$  在  $OC$  的方向上作均匀运动, 其他部分是靜止的。在滑移以外的全区域里設物体是剛性的, 則有  $\dot{I}=0$ , 且  $\sum \int_{L_{AB}} |v_F^{(k)} - v_F^{(k)}| dl_{AB}$  是  $\overline{AB} \times 2v$ ,  $\int_{c_1} (\bar{F}_x v_x + \bar{F}_y v_y) ds$  是  $\overline{AE} \times pv$ . 再考虑  $\overline{AB} = \sqrt{2}b - (\cos \delta + \sin \delta)a$ ,  $\overline{AE} = 2a \sin \delta$  时, 則有

$$m_k = \frac{k}{p} \frac{\sqrt{2}b - (\cos \delta + \sin \delta)a}{a \sin \delta}, \quad (23.8)$$

若选取使  $m_k$  为最小的  $\delta$ , 即  $\delta = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{\sqrt{2}b}\right)$  时, 則

$$m_k = \frac{k}{p} \left( \sqrt{2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} - 1 \right).$$

再同 (23.2) 結合起来, 則得  $S$  的上下界

$$\frac{2k}{p} \log \frac{b}{a} \leq S \leq \frac{k}{p} \left( \sqrt{2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} - 1 \right). \quad (23.9)$$

若設  $\frac{b}{a} = 1.5$ , 則 (23.9) 变成

$$0.811\left(\frac{k}{p}\right) \leq S \leq 0.871\left(\frac{k}{p}\right). \quad (23.10)$$

可以看出 (23.9) 比 (23.6) 的精确度提高了。

极限分析的方法也适用于剛架結構, 用它可以解决許多求  $S$  的上下界的有趣問題。关于这方面的知識可以参閱书末文献 [12]。

## 第7章 全应变塑性論

在全应变塑性論里,假設应力和应变間有一一对应的关系。当然象曾經在第3章說过的那样,应变的最終状态不仅依赖于最終应力,而且依赖于加载路綫,所以形成全应变塑性論基础的应力应变关系仅对于特別荷载才能成立<sup>[9]</sup>。因此全应变塑性論里通常含有数学的和物理学的矛盾。但因它比应变增量塑性論在运算上可以简化得多,所以还有一些研究者喜欢采用它。本书也給它专辟一章略述大概。全应变塑性論里除了应力应变有非綫性关系外,其余都和彈性論里完全一样。

### § 24 应力应变关系

在全应变塑性論里,假定应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{pq}) \quad (i, j, p, q = 1, 2, 3), \quad (24.1)$$

又設应力应变关系在所考虑的变形过程里不能变更。从而問題可以假定仅局限于加载的情形,而不包括卸载的过程。由于这个假定,全应变塑性論和非綫性彈性論就沒有区别了。再設关系(24.1)中的  $\varepsilon_{pq} = 0$  对应着  $\sigma_{ij} = 0$ , 亦即使零应变点对应着零应力点而选取的。若而数行列式  $\frac{\partial(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots)}{\partial(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \dots)}$  在含有  $\varepsilon_{pq} = 0$  的区域内不为零时,則(24.1)的逆关系式可以唯一地决定,即是

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{pq}) \quad (i, j, p, q = 1, 2, 3). \quad (24.2)$$

全应变塑性論的問題由以下各条件所定义:

$$\text{平衡方程:} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad (24.3)$$

$$\text{应力应变关系:} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{pq}). \quad (24.4)$$

$$\text{或} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{pq}); \quad (24.4')$$

$$\text{协调条件: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]; \quad (24.5)$$

$$\text{边界条件: 在 } S_1 \text{ 上 } \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i; \quad (24.6)$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上 } u_i = \bar{u}_i \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (24.7)$$

除应力应变关系之外, 其他条件都和 §6 的微小变位理論的完全一样。我們將考察此时是否也有变分原理成立。

首先檢查用 (24.1) 或 (24.2) 确定应力应变关系时, 应变能量函数  $A$  和余能函数  $B$  是否存在。  $A$  的定义是

$$\delta A = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (24.8)$$

所以  $A$  存在的充要条件就是在 (24.1) 里必須滿足关系

$$\frac{\partial \sigma_{pq}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} \quad (i, j, p, q=1, 2, 3). \quad (24.9)$$

若确定 (24.9) 已成立时, 則 (24.8) 右側的  $\sigma_{ij}$  利用 (24.1) 可以表示为  $\varepsilon_{pq}$  的函数。再将它作积分就得到  $A$ , 于是有如下第一变分原理成立:

**第一变分原理** “設滿足几何边界条件 (24.7) 的一組变位为  $u_i$ , 利用 (24.5) 由  $u_i$  导出的应变命为  $\varepsilon_{ij}$  时, 那末使

$$\Pi_p = \iiint_V (A - X u_i) dv - \iint_{S_1} \bar{F} u_i ds \quad (24.10)$$

取极值, 便得到正确解。”

确定  $A$  的存在后, 則  $B$  由

$$B(\sigma_{pq}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - A \quad (24.11)$$

可以得到。若在 (24.2) 內滿足关系

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j, p, q=1, 2, 3) \quad (24.12)$$

时, 就可以証明  $B$  的存在和  $A$  的存在无关, 而且由

$$\delta B = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (24.13)$$

可以算出。求得  $B$  后就有下列第二变分原理成立。

就二变分原理 “設满足平衡方程 (24.3) 及力学边界条件 (24.6) 的一组应力为  $\sigma_{ij}$ , 那末使

$$H_0 \equiv \iiint_V B \, dv - \iint_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \, dS \quad (24.14)$$

取衡值时, 就得到了正确解。”

这两个变分原理都很容易証明, 故从略。它們都仅指出正确解各由  $H_p$  及  $H_0$  的极值条件所确定。究竟  $H_p$  或  $H_0$  的极值是极大值还是极小值, 或者两者都不是? 当尚未进一步具体地指定应力应变关系式时, 这是不能断定的。

## § 25 割切模量理論

应力应变关系假定为

$$\frac{\sigma'_x}{\varepsilon'_x} = \frac{\sigma'_y}{\varepsilon'_y} = \frac{\sigma'_z}{\varepsilon'_z} = \frac{2\tau'_{yz}}{\gamma'_{yz}} = \frac{2\tau'_{zx}}{\gamma'_{zx}} = \frac{2\tau'_{xy}}{\gamma'_{xy}}, \quad (25.1)$$

$$\text{即} \quad \sigma'_{ij} = \mu \varepsilon'_{ij} \quad (25.2)$$

的形状时, 其理論就叫作割切模量理論。这里  $\mu$  是正值比例常数, 由 (25.2) 有

$$\mu F = S. \quad (25.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{这里} \quad F^2 &\equiv \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij}, & F dF &= \varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij}, \\ S^2 &\equiv \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, & S dS &= \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

設  $S$  和  $F$  都是单值連續函数, 且

$$S = S(F) \text{ 或 } F = F(S). \quad (25.5)$$

如图 25.1。至于象 (25.5) 形状的  $S$  和  $F$  的关系式可以用简单实验 (例如简单拉伸实验及简单剪切实验) 的结果給予决定。这样, 应力应变关系式 (25.2) 就变

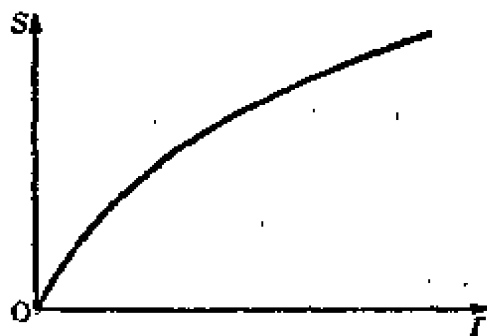


图 25.1  $S$ - $F$  曲线

为如下形状:

$$\sigma'_{ij} = \frac{S(\Gamma)}{\Gamma} \varepsilon'_{ij}, \quad (25.6)$$

或 
$$\varepsilon'_{ij} = \frac{\Gamma(S)}{S} \sigma'_{ij}. \quad (25.7)$$

这两組方程都各含六个方程, 而且都只有五个是独立的。此外再附加上条件

$$\sigma = \frac{E}{1-2\nu} e. \quad (25.8)$$

这里 
$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

$$e = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

(25.8) 告訴我們塑性变形并不引起体积变化。

## § 26 Kachanoff 原理

利用割切模量理論, 可以算出  $A, B$  如下:

$$A = \int_0^{\Gamma} S(\Gamma) d\Gamma + \frac{3E}{2(1-2\nu)} e^2, \quad (26.1)$$

$$B = \int_0^S \Gamma(S) dS + \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma^2. \quad (26.2)$$

当  $S-\Gamma$  曲綫具有  $\frac{S}{\Gamma} > 0, \frac{dS}{d\Gamma} > 0$  的特性时, 将 (24.10) 及 (24.14) 的  $A, B$  各代以 (26.1) 及 (26.2) 后所得的  $\Pi_p$  及  $\Pi_e$  对于正确解是相对极小的, 亦即  $\Pi_p$  及  $\Pi_e$  的二阶变分是具有  $\delta^2 \Pi_p \geq 0, \delta^2 \Pi_e \geq 0$  的特性的, 这一点頗容易証明<sup>[10]</sup>。当变分原理采用割切模量理論的应力应变关系时, 就叫作 Kachanoff 原理。

## § 27 理想塑性材料 (Hencky 材料)

将割切模量理論应用于服从 Mises 屈服条件的理想塑性材料

时,就得到 Hencky 的应力应变关系式。当  $S < \sqrt{2}k$  时,这种材料仅引起弹性变形;当  $S = \sqrt{2}k$  时则引起塑性流动(图 27.1)。

(26.1), (26.2) 的  $A, B$  此时变成如下形状:

$$A = \begin{cases} G\Gamma^2 + \frac{3E}{2(1-2\nu)}e^2, & \Gamma \leq \Gamma_0, \\ G\Gamma_0^2 + \frac{3E}{2(1-2\nu)}e^2 + \sqrt{2}k(\Gamma - \Gamma_0), & \Gamma \geq \Gamma_0, \end{cases} \quad (27.1)$$

$$B = \begin{cases} \frac{1}{4G}S^2 + \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2, & S < \sqrt{2}k, \\ \frac{1}{2G}k^2 + \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2, & S = \sqrt{2}k. \end{cases} \quad (27.2)$$

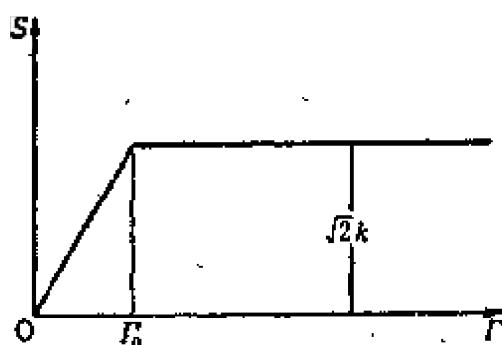


图 27.1 Hencky 材料的  $S$ - $\Gamma$  曲线

又应力应变关系由  $\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}$ , 有

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2G\varepsilon'_{ij} + \frac{E}{1-2\nu}e\delta_{ij}, & \Gamma \leq \Gamma_0, \\ \frac{\sqrt{2}k}{\Gamma}\varepsilon'_{ij} + \frac{E}{1-2\nu}e\delta_{ij}, & \Gamma \geq \Gamma_0. \end{cases} \quad (27.3)$$

逆解之,得

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2G}\sigma'_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij}, & S < \sqrt{2}k, \\ \frac{1}{2G}\sigma'_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij} + \lambda\sigma'_{ij}, & S = \sqrt{2}k. \end{cases} \quad (27.4)$$



这里  $\lambda$  是正值不定量。此时成立的变分原理叫作

**Haar-Kármán 原理** “設满足平衡方程(24.3)及 Mises 屈服条件  $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \leq 2k^2$  和  $S_1$  上的边界条件(24.6) 的一组应力分量为  $\sigma_{ij}$ , 那末值

$$\Psi \equiv \iiint_V \left[ \frac{1}{4G} S^2 + \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma^2 \right] dv - \iint_{S_1} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS \quad (27.5)$$

取极小值时就得到正确解。”

**証明** 設正确解的应力、应变及变位各为  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  及  $u_i$ , 比較解的应力是  $\sigma'_{ij}$ , 且設

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \quad (\varepsilon^e_{ij} \text{ 是彈性应变, } \varepsilon^p_{ij} \text{ 是塑性应变}).$$

作(27.5)的一阶变分,得

$$\delta\Psi = \iiint_V \varepsilon^p_{ij} \delta\sigma_{ij} dv - \iint_{S_1} \delta\sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS. \quad (27.6)$$

將  $\varepsilon^p_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^e_{ij}$  代入后, 因为  $\varepsilon_{ij}$  是正确解的应变, 必满足协调条件, 所以用 Green 定理改写, 就得

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \iiint_V (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^e_{ij}) \delta\sigma_{ij} dv - \iint_{S_1} \delta\sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS \\ &= - \iiint_V (\delta\sigma_{ij})_{,j} u_i dv + \iint_{S_1} \delta\sigma_{ij} n_j u_i dS \\ &\quad + \iint_{S_1} \delta\sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS - \iiint_V \varepsilon^e_{ij} \delta\sigma_{ij} dv \\ &= - \iiint_{V_p} \varepsilon^e_{ij} \delta\sigma_{ij} dv. \end{aligned} \quad (27.7)$$

这里  $V_p$  表示該积分仅取在正确解的塑性区域里。又由应力应变关系(27.4)有

$$\varepsilon^e_{ij} = \lambda \sigma'_{ij}, \quad \lambda > 0, \quad (27.8)$$

所以(27.7)变成

$$\delta\Psi = - \iiint_V \lambda \sigma'_{ij} \delta\sigma_{ij} dv. \quad (27.9)$$

但是  $\sigma'_{ij} \delta\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} (\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) = \sigma'_{ij} (\sigma^*_{ij} - \sigma'_{ij})$ ,

而且由 Schwarz 不等式有

$$\sigma'_{ij} \sigma^*_{ij} \leq \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \cdot \sqrt{\sigma^*_{ij} \sigma^*_{ij}}.$$

我們在选取  $\sigma'_{ij}$  时, 又要求能使它在  $V_0$  內有  $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2k^2$ , 而比較解是  $\sigma^*_{ij} \sigma^*_{ij} \leq 2k^2$  的。将这些关系綜合起来便得到

$$\delta\Psi \geq 0. \quad (27.10)$$

这里  $\Psi$  是  $\sigma_{ij}$  的正值二次函数, 它的二阶变分是正的, 而且不含高于它的項, 所以  $\Psi$  在正确解的情形下是极小的。这个証明是 Greenberg 作的<sup>[10]</sup>。Greenberg 的証明指出, 这时有  $\delta\Psi \geq 0$ , 这和普通变分的  $\delta\Psi = 0$  的情形不一样, 因为这里是在比較解的应力上加上了条件  $\sigma^*_{ij} \sigma^*_{ij} \leq 2k^2$  而得来的。例如  $y = x^2$  的最小值在  $x \geq 1$  的条件下, 仅当  $x = 1$  时才能实现。但在这时却有  $y'(1) \neq 0$ 。

## § 28 理想剛塑性材料

在 § 27 所处理的 Hencky 材料里,  $E, G \rightarrow \infty$ , 而且当物体全区域处于屈服状态时, 应力应变关系是

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sqrt{2} k}{\sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}} \varepsilon_{ij}. \quad (28.1)$$

这样的材料是不可压缩的, 即  $\varepsilon_{ii} = 0$ 。这时有下列两个变分原理成立(証明和 § 17 完全一样故从略)。

**第一变分原理** “設满足几何边界条件 (24.7) 的一組变位为  $u_i^*$ , 利用协调条件 (24.5) 由  $u_i^*$  导出的应变命为  $\varepsilon_{ij}^*$ , 且設  $\varepsilon_{ij}^*$  满足不可压缩条件  $\varepsilon_{ii}^* = 0$ , 那末使

$$\Phi^* \equiv \sqrt{2} k \iiint_V \sqrt{\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*} dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i u_i^* dS \quad (28.2)$$

取极小值时,就得到正确解。这个原理叫做 Markoff 原理。”

**第二变分原理** “設满足平衡方程 (24.3) 及屈服条件  $\sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* \leq 2k^2$  和力学边界条件 (24.6) 的一组应力为  $\sigma_{ij}^*$ , 那末使

$$\iint_{S_1} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \quad (28.3)$$

取极大值时,就得到正确解。这个原理叫做 Sadowsky 原理。”

## 附 录

### I. Green 定理

本书里经常引用的 Green 定理是这样的:

当  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$  时, 有

$$\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \iint_S \sigma_{ij} n_j u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij, j} u_i dv.$$

为了证明, 先作下列变换:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} &= \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} \\ &\quad + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \varepsilon_{32} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} \\ &= \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \\ &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \tau_{yz} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

再利用关系式

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right] dv \\ &= \iint_S (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) u dS - \iiint_V \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] u dv, \end{aligned}$$

就可以証明。

## II. 特征曲綫

考虑一阶偏微分方程組：

$$\left. \begin{aligned} P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial x} + S \frac{\partial v}{\partial y} &= T, \\ P' \frac{\partial u}{\partial x} + Q' \frac{\partial u}{\partial y} + R' \frac{\partial v}{\partial x} + S' \frac{\partial v}{\partial y} &= T'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

这里系数  $P, Q, \dots$  等都是  $x, y, u, v$  的函数。設  $y=f(x)$  是在  $xy$  平面里确定的平滑曲綫。取  $x$  为独立变数, 而且把  $u, v$  沿着曲綫  $y=f(x)$  的变化命为  $\delta u, \delta v$ , 那末有

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (\text{II.2})$$

利用 (II.2) 把 (II.1) 中的  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$  消去, 得到

$$\left. \begin{aligned} \left( -P \frac{dy}{dx} + Q \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( -R \frac{dy}{dx} + S \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ = T - P \frac{\delta u}{\delta x} - R \frac{\delta v}{\delta x}, \\ \left( -P' \frac{dy}{dx} + Q' \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( -R' \frac{dy}{dx} + S' \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ = T' - P' \frac{\delta u}{\delta x} - R' \frac{\delta v}{\delta x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

加以整理后, 則得

$$\left. \begin{aligned} (-Pdy + Qdx) \frac{\partial u}{\partial y} + (-Rdy + Sdx) \frac{\partial v}{\partial y} \\ = Tdx - Pdu - Rdv, \\ (-P'dy + Q'dx) \frac{\partial u}{\partial y} + (-R'dy + S'dx) \frac{\partial v}{\partial y} \\ = T'dx - P'du - R'dv. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.4})$$

这里  $du, dv$  表示  $u, v$  沿着曲线  $y=f(x)$  的增量。把矩阵  $[M]$  及行列式  $D, V$  定义如下:

$$[M] \equiv \begin{pmatrix} -Pdy + Qdx & -Rdy + Sdx & Tdx - Pdu - Rdv \\ -P'dy + Q'dx & -R'dy + S'dx & T'dx - P'du - R'dv \end{pmatrix}, \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{aligned} D &\equiv \begin{vmatrix} -Pdy + Qdx & -Rdy + Sdx \\ -P'dy + Q'dx & -R'dy + S'dx \end{vmatrix} \\ &= (PR' - P'R)(dy)^2 - [(QR' - Q'R) + (PS' - P'S)](dxdy) \\ &\quad + (QS' - Q'S)(dx)^2, \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$$V \equiv \begin{vmatrix} -Pdy + Qdx & Tdx - Pdu - Rdv \\ -P'dy + Q'dx & T'dx - P'du - R'dv \end{vmatrix}. \quad (\text{II.7})$$

$D=0$  就叫作 (II.1) 的特征方程, 它若有二实根时, 就可以分解成

$$(dy - \Gamma_+ dx)(dy - \Gamma_- dx) = 0, \quad (\text{II.8})$$

那末偏微分方程 (II.1) 就叫作双曲型的; 分别将

$$\frac{dy}{dx} = \Gamma_+, \quad \frac{dy}{dx} = \Gamma_- \quad (\text{II.9})$$

积分而得的曲线叫作特征曲线。

当方程  $D=0$  无实根, 即在实数范围内  $D \neq 0$  时, 如果  $y=f(x)$  确定了  $u, v$ , 那末由 (II.4) 就可以计算出  $\frac{\partial u}{\partial y}$  及  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , 于是由 (II.2) 也可以计算出  $\frac{\partial u}{\partial x}$  及  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . 将 (II.1) 分别对  $x, y$  作导数, 只要  $D \neq 0$ , 就可以求得更高阶的导数, 于是在  $xy$  平面上的  $u, v$  值便可以决定。

当  $D=0, V=0$  时, 矩阵  $[M]$  是一秩的。虽然由 (II.4) 可以求出  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$  的值, 但求得的值不是唯一的, 即在特征曲线上  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$  的值是不连续的, 于是  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$  的值也可以不连续。  $D=0$  确定了特征曲线的方向,  $V=0$  指出  $u, v$  沿着特征曲线的变化情形。

当  $D=0, V \neq 0$  时解不存在, 于是, 当  $D=0$  时只要有解存在,

那末就必有  $V=0$ 。

关于这方面的詳細理論,請參閱后面的文献[16]。

### 参 考 文 献

- [1] S. Timoshenko: Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1934), 井坂・江崎・森・共譯: 彈性体の力学(コロナ社, 1935)。
- [2] 仓西正嗣: 彈性学(日本机械学会, 1948)。
- [3] E. Reissner: Lecture Notes on Theoretical and Applied Elasticity, at Massachusetts Institute of Technology (1954)。
- [4] 森口繁一: 彈性体の陰違ひの基礎理論, 应用数学力学, 第一卷第2号 (1947), 87。
- [5] R. Courant & D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I, (Springer, 1931)。
- [6] K. Washizu: "On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity" Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 25-18 (1955)。
- [7] E. Trefftz: "Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren", Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech., (Zürich, 1926), 131。
- [8] A. Weinstein: "New Methods for the Estimation of Torsional Rigidity" Proc. 3rd Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society (1949)。
- [9] R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity (Oxford, 1950)。鷲津・山田・工藤・共譯: 塑性学(培风館, 1954)。
- [10] H. J. Greenberg: "On the Variational Principles of Plasticity", Contract N7, ONR-358 (Brown University, 1949)。
- [11] W. Prager & P. G. Hodge, Jr.: Theory of Perfectly Plastic Solids (John Wiley & Sons, 1951)。安倍・宮本・共譯: 塑性学(丸善, 1954)。
- [12] 仓西正嗣: 极限設計法(星-△社, 1954)。
- [13] D. C. Drucker, H. J. Greenberg and W. Prager: "The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain", Journal of Applied Mechanics, 18, No. 4 (1951, Dec.), 371。

- [14] 山田嘉昭: 塑性学の最近の進歩, 日本機械学会志, 第 60 卷第 456 号 (1957 年 1 月), 9 頁。
- [15] A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids (McGraw-Hill, 1950)。
- [16] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen (Springer, 1952)。